INSTITUZIONI MECCANICHE

TRATTATO

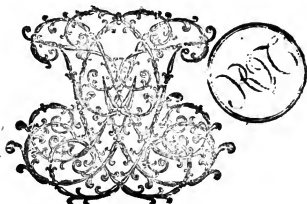
DEL P. ABATE D. GUIDO GRANDI

EX - GENERALE CAMALDOLESE, E PROFESSORE
DI MATTEMATICA NELL' UNIVERSITA' DI PISA

DEDICATO

All' Illuſtriſs. e Clariſs. Sig. Senatore

PIER FRANCESCO DE' RICCI

PRESIDENTE DELL' ILLUSTRISS. SACRA, E MILITARE RELIGIONE
DE' CAVALIERI DI S. STEFANO, AUDITORE, E MODERATORE
VIGILANTISSIMO DELLO STUDIO PISANO.

IN FIRENZE NELLA STAMPERIA DI S. A. R.

Per Gio: Gaetano Tartini, e Santi Franchi.
CON LIC. DE' SUP. MDCCXXXIX.

Illustriss.^{mo}, e Clariss.^{mo} Sig.^{re} e Padron Colendiss.

LE INSTITVZIONI MECCANICHE *le quali ad alcuni studenti furono da me dettate in volgare, ed a più altri in latino, essendosi ora in questa nostra lingua Italiana stampate, mi dò l'onore di dedicarle a V. Sig. Illustriss. e Clarissima; Perchè, essendo ella supremo Auditore, e Moderatore diligentissimo della nostra Pisana Università, averà gusto di esaminare queste mie private lezioni, per comprendere, se con la dovuta squisitezza, e diligenza, siansi dichiarate nello studio le più utili parti della Scienza Matematica, impostami d'insegnare a codesti scolari. Non dubito, che V.Sig. Illustrissima, e Clarissima sia per approvare quest' Opera, benchè tanto in breve contenga li moltissimi Teoremi, e Problemi, at-*

tenenti a questa Meccanica; e spero ancora, che l' animo suo generosissimo potrà compiacersi pure dell' altre Scienze Meccaniche, cioè Instituzioni Geometriche, Aritmetiche, Algebratiche, Ottiche, Catottriche, Diottriche, Astronomiche, &c. che altresì farò dare alla luce, tanto in lingua Toscana, che in lingua Latina, perchè possano essere intese ancora nell' altre Provincie d' Europa: purchè la mia età già in molti anni avanzata, e da alcune familiari indisposizioni del capo oppressa, non mi trattenga dal poter disporre tutte queste mie speculazioni, in maniera di poterle così dare alle stampe, come so, che la sua graziosissima Gentilezza ne bramerà il compimento.

Mi rassegno però, con tutto l' ossequio, alla sua impareggiabile benignità, e rimettendomi a' suoi pregiatissimi comandi, sinceramente mi dò l' onore di confermarmi.

Di V. Sig. Illustrissima, e Clarissima

Devotissimo Obbligatissimo Servitore
D. Guido Abate Grandi.

PREFAZIONE.

QUeste MECCANICHE INSTITUZIONI, che comprendono la Scienza Teorica, e la Pratica del Moto de' Corpi pesanti, e delle forze, che si applicano a tali movimenti, benchè in breve Trattato raccolte, ne espongono però la maggior parte de' Teoremi, e Problemi necessarii per tale Scienza. Solamente si sono quì tralasciate alcune notizie, che appartengono all' Arte Militare, perchè non le ho stimate convenienti al mio Religioso Instituto, e possono vedersi ne' libri de' Secolari, Pietro Sardi Romano, Bonajuto Lorini Fiorentino, Pietro Paolo Floriani Maceratense, Donato Rossetti Livornese, Giuseppe Gallizio Veneziano, ed altri simili, l' Opere de' quali sono però molto lunghe, ed in alcuni libri di essi vi è la pura Pratica, non la dimostrazione Geometrica.

Que-

Questo mio Trattato è diviso in dieci Capitoli, de' quali il primo parla, *del Moto Equabile*; il secondo, *de' Momenti* di qualsivoglia forza; il terzo, *del Centro di Gravità*; il quarto, *del Moto composto di più Moti Equabili*; il quinto, *delle Macchine, che facilitano il Moto*; il sesto, *del Moto accellerato, e ritardato*; del che pure ne ho stampato nelle note del Galileo, circa il moto naturalmente accellerato, come può vedersi nell'ultima edizione dell'Opere Galileane, nel tomo 3. dalla pag. 382. alla pag. 419. Il settimo è, *del Moto composto di moto equabile, e dell' accellerato*, che accade ne' vari tiri di palle, di cui ancora ho parlato nelle suddette mie note del Galileo, dalla pag. 419. alla pag. 425. L' ottavo capitolo è, *della Percossa*, il nono, *de' Pendoli*, e l' ultimo, cioè il decimo è, *della resistenza de' Solidi*. Di ciò avea già molto parlato nella mia *Risposta Apologetica*, gli di cui Teoremi sono molto approvati dal Sig. Pietro Van Musschenbroek, dottissimo Professore dell' Accademia di Utrech, nel suo libro *di Fisica Esperimentale, e Geometrica*, stampato in Leida del 1729. ed ancora ne ho discorso di molto nel Trattato *delle Resistenze*, principiato dal Viviani, e da me compiuto, riordinato, ed accresciuto con moltissime dimostrazioni, il quale è pure impresso nel detto tomo 3. della nuova edizione del Galileo, dalla pag. 193. alla 305.

Si poteva ancora, tra queste Meccaniche dimostrazioni, aggiungervi ciò, che si è da me dimostrato ne' due libri, *del Movimento dell'acque*, stampati nel tomo 2. della *Raccolta degli Autori, che trattano del Moto dell' acque*, dalla pag. 435. alla pag. 593. gli quali può essere ancora si tornino a ristampare nel Corso mio matematico, in cui si vedranno ancora esposti gli Elementi Geometrici, ed Aritmetici, e Conici, ed Algebratici, ed Ottici, ed Astronomici &c. tutti in breve dimostrati, gli quali non solo saranno proposti in simili tometti piccoli, con questa nostra Toscana lingua: ma di più se ne farà l'impressione di tutti questi Trattati in lingua Latina, raccolti in quarto, perchè ancora da gli Oltramontani possano essere intesi.

Ancora nel sopra accennato tomo 3. del Galileo, dalla pag. 331. alla altra 339. vi sono stampate alcune mie dimostrazioni circa *il Moto de' Corpi Solidi, in un mezzo fluido*; Il che pure può appartenere a quest'Opera Meccanica: ma basta si osservi dove già è impresso nel detto libro. Però sarà bene, che da molti si consideri questo Trattato, in cui sono le principali dimostrazioni, di molti effetti assai giovevoli a molte pratiche, di cui ne hanno discorso ancora gli antichi Filosofi, e Matematici, avendone ancora Aristotele fatta un Opera di Meccanica, però con alcune fal-

sità

sità aggiuntevi, onde Girolamo Cardano, e Francesco Patrizio, non stimano, che possa essere quell'Opera scritta da lui; e meglio parlano di queste proposizioni gli Matematici, che i puri Filosofi. Però non si ritrova chi spieghi nella Meccanica tutti gli argomenti, di cui io parlo in questi dieci Capitoli: mentre la maggior parte degli altri Autori, o parlano solamente dell'uno, o di due, o di tre soli oggetti, ivi proposti; Però, benchè vi manchino alcune poche cose, supppongo, che siano per soddisfarsi meglio molti Studenti di questa materia, nel presente Trattato da me proposto.

IN-

INSTITUZIONI MECCANICHE

DEFINIZIONI

I. PER MECCANICA s'intende la scienza del moto, e delle forze moventi.

II. VELOCITÀ si chiama quella proprietà relativa del moto, che nasce dal paragone dello spazio scorso dal mobile, e dal tempo impiegato nel moto; sicchè dicesi tanto più veloce un moto dell' altro, quanto maggiore è lo spazio fatto in egual tempo, ovvero quanto minore è il tempo speso in fare spazj eguali.

III. MOTO EQUABILE dicesi quello, in cui si mantiene sempre la stessa velocità: sicchè in qualunque egual parte di tempo, si passi una parte eguale di spazio.

IV. MOTO ACCELERATO si chiama quello, in cui va sempre crescendo la velocità; onde in pari tempo si scorra più spazio verso il fine, che verso il principio del moto.

V. MOTO RITARDATO è quello, in cui la velocità va sempre diminuendosi; onde in pari tempo si fa minor parte di spazio verso il fine del moto, di quello si facesse verso il principio.

VI. POTENZA si appella tutta quella forza assoluta, che independentemente da qualunque circostanza vantaggiosa, o svantaggiosa, risiede in ciò, che muove, o che resiste al moto per avere il suo effetto.

VII. MOMENTO chiamasi quella forza relativa,

che acquiſtaſi da una potenza in ordine al muovere, o reſiſtere al moto, ſecondo le varie circoſtanze, e diſpoſizioni, colle quali viene applicata, e ſpezialmente per cagione della minore, o maggiore velocità, con cui è in procinto a muoverſi, in paragone del moto, che dee avere una potenza a ſe contraria.

VIII. Direzione d'una potenza, o di un mobile, è quella linea retta, per cui queſto è tirato da quella, o ſpinto a muoverſi: che ſe il mobile, o la potenza deſcriverà qualche linea curva, allora la direzione ſi cangerà in qualunque punto, e ſarà ſempre la tangente di quel punto della curva deſcritta. Imperocchè per la detta tangente ſcapperebbe il mobile, ſe non foſſe da qualche forza trattenuto, ed obbligato a ſeguitare la medeſima curva, come ſi vede in un ſaſſo girato colla fionda, di cui, laſciando ſcorrere un capo, ſubito ſcorre il ſaſſo per la tangente di quell' arco, che deſcriveva, come ſe foſſe indirizzato per eſſa, ſebbene poi il ſuo peſo lo fa deſcrivere un'altra curva, come vedraſſi a ſuo luogo.

IX. La Gravità è quella potenza, o forza aſſoluta, con cui i corpi terreſtri ſon tirati, o ſpinti al baſſo verſo il centro della terra.

X. Centro Del Moto è quel punto, d'intorno a cui ſi muove un corpo, o qualche ſtrumento, ovvero l'aggregato di più corpi inſieme conneſſi.

XI. Centro Di Gravita' in un corpo, o in più corpi inſieme collegati ſi dice quel punto, d'intorno a cui ſi equilibrano tutte le parti in modo tale, che ſe quel punto ſolo foſſe ſoſtenuto, il tutto ſtarebbe fermo, purchè altra ſpinta non ſi deſſe a veruna parte.

XII.

XII. Forza Centrifuga è quella, che rispinge un mobile dal centro intorno a cui gira, come apparisce in un sasso girato colla fionda, da cui si tiene tesa essa fionda, ancora quando descrive l'arco superiore del cerchio, ed in conseguenza dove non opera la sua gravità, ma la sola forza, con cui tende ad allontanarsi dal centro del moto.

SUPPOSIZIONI.

I. CHe il centro di gravità d'uno, o di più corpi connessi, se non venga impedito, cerchi d'accostarsi quanto mai sia possibile al centro della terra.

II. Che i gravi posti in quiete da se non si muovono, quando il loro centro comune di gravità non possa discendere.

III. Che la velocità una volta impressa nel mobile, in esso rimanga intiera per fino a tanto, che da qualche azione contraria non si distrugga; onde ogni corpo dovrà perseverare nel suo stato di quiete, o di moto per la medesima direzione, e colla stessa velocità, con cui ha principiato a muoversi, se non in quanto da qualche altra forza venga obbligato a mutare stato, ed alterarlo in qualsivoglia maniera.

IV. Che una potenza applicandosi ad operare in qualunque punto della sua direzione, faccia il medesimo effetto, dimodochè con più lungo, o più breve filo tiri a se un corpo, e mantenga sempre la medesima direzione.

V. Che le direzioni, colle quali naturalmente discendono i corpi gravi, non molto fra di loro distanti, possano considerarsi come parallele, tra

loro sulla superficie della terra, senza verun sensibile errore nelle cose Fisiche, e Meccaniche; imperciocchè differiscono dall' esser esattamente parallele, solo per la quantità dell' angolo piccolissimo, che comprenderebbero esse direzioni prolungate fino al centro della terra, essendo il detto angolo a quattro retti, come la distanza delle suddette direzioni a tutto il contorno del globo terrestre, che però non è cosa sensibile.

ASSIOMI.

I. La stessa potenza operando con maggior velocità ha maggior momento, e con minore velocità avrebbe momento minore, e con velocità eguale eserciterebbe egual momento.

II. Se colla stessa velocità si applica una maggior potenza avrà maggior momento, ed una potenza minore avrà minor momento, ed una egual potenza avrà momento eguale.

III. Colla stessa velocità movendosi un mobile, fa maggiore spazio in più lungo tempo, minore spazio in tempo più breve, eguale spazio in tempo eguale.

IV. Essendo spinto un mobile in due parti direttamente opposte da due momenti eguali, non cederà a veruno di essi, ma rimarrà del tutto immobile.

V. E viceversa se un corpo rimane immobile fra più potenze, che in diverse parti lo spingono, bisogna, che i momenti di esse potenze, secondo qualunque direzione opposta sieno eguali altrimenti cederebbe il corpo al momento maggiore, lasciandosi colà trasportare, ove fosse spinto da esso.

CAP.

CAPITOLO I.

Del Moto Equabile.

PROPOSIZIONE I.

Se colla ſteſſa velocità viene traſcorſo lo ſpazio S *nel tempo* T, *e lo ſpazio* L *nel tempo* H *equabilmente, ſaranno detti ſpazj proporzionali a' tempi.*

Tav I. Fig. 1.

IMperocchè, ſiccome nel tempo T, ſi fa lo ſpazio S, così, ſtante la medeſima velocità, ſi farebbe in altrettanto tempo, altrettanto ſpazio (per l' Aſs. 3.) onde preſo qualſivoglia moltiplice del dato tempo, per eſempio $3T$, ſi farebbe in eſſo uno ſpazio egualmente moltiplice $3S$, e per la ſteſſa ragione in qualſivoglia moltiplice dell'altro tempo H, per eſempio $4H$, ſi paſſerebbe uno ſpazio $4L$ altrettanto moltiplice dello ſpazio L, e perchè in vigore del medeſimo Aſſioma 3. ſecondo che il tempo $3T$ foſſe maggiore, minore, o eguale al tempo $4H$, riuſcirebbe altresì lo ſpazio $3S$ reſpettivamente maggiore, minore, o eguale allo ſpazio $4L$; dunque i tempi T, H ſono proporzionali agli ſpazj S, L, mentre ſi accordano gli egualmente moltiplici degli antecedenti, nell' eſſer maggiori, minori, o eguali, agli egualmente moltiplici de' conſeguenti, ſecondo qualunque moltiplicazione, come richiede la definizione de' Proporzionali. Il che doveaſi dimoſtrare.

PROPOSIZIONE II.

Se nello ſteſſo tempo colla velocità V *ſi farà da un mobile lo ſpazio* S, *e colla velocità* C *ſi ſcorreſſe*

Fig. 2.

lo ſpazio L, *ſaranno detti ſpazj proporzionali alla velocità* .

CIò ſegue immediatamente dalla difinizione ſeconda, ſenza che faccia uopo dimoſtrarla più particolarmente, oppure ſi può applicarvi la dimoſtrazione della precedente, con prendere i moltiplici delle velocità in vece de' moltiplici de' tempi, ed argumentando come ſopra.

COROLLARIO.

Se gli ſpazj ſono proporzionali alle velocità, ſaranno paſſati in tempi eguali, perchè ſe uno ſpazio ſi foſſe ſcorſo in tempo maggiore dell'altro, una parte del primo ſpazio ſarebbe ſcorſa in tempo eguale a quello, di tutto lo ſpazio ſecondo, onde quella parte del primo, ſarebbe a tutto il ſecondo, come le loro velocità, il che ſarebbe contro l' Ipoteſi, in cui ſi ſuppongono gli due ſpazj interi proporzionali ad eſſe velocità.

PROPOSIZIONE III.

Fig. 3. *Se colla velocità* V, *nel tempo* T, *ſi faccia lo ſpazio* S, *e colla velocità* C, *nel tempo* H, *lo ſpazio* L, *ſaranno gli ſpazj* S, L *in ragione compoſta di quella delle velocità, e di quella de' tempi*.

SUppongaſi un terzo mobile, che nel tempo T, colla velocità *C*, faccia lo ſpazio *D*, ſaranno gli ſpazj *S*, *D*, come le velocità *V*, *C*, eſſendo fatti nello ſteſſo tempo *T*, poſcia lo ſpazio *D*, allo ſpazio *L*, ſarà come il tempo *T*, al tempo *H*, eſſendo fatti colla medeſima velocità *C*; dunque la ragione di *S*

ad

ad L, la quale si compone di quella di S a D, e di quella di D ad L, riuscirà composta dalla ragione delle velocità V, C, e de' tempi T, H. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se dalle linee esprimenti le velocità, ed i tempi, si faranno due rettangoli VT, CH, saranno questi come gli spazj S, L; imperocchè tali rettangoli (Prop. 23. lib. 6. degli Elem.) hanno pure la ragione composta de' lati V, C, e degli altri T, H, che sono intorno i loro angoli eguali. Fig. 4.

II. Se sarà il tempo T, al tempo H, come reciprocamente la velocità C alla velocità V, gli spazj S, L saranno eguali, perchè ancora i rettangoli VT, CH, che d'intorno gli angoli eguali avrebbero i lati reciprochi, sarebbero eguali (Prop. 14. lib. 6. degli Elem.), e viceversa qualunque volta detti spazj S, L fossero eguali, sarebbero reciproche le velocità a i tempi, dovendo allora riuscire eguali i detti rettangoli, e però avere i lati reciprochi secondo la medesima Proposizione.

III. E' manifesto poi, che se gli spazj sono come le velocità, saranno fatti in tempo eguale, e se saranno come i tempi, saranno scorsi con eguale velocità, perchè i suddetti rettangoli VT, CH, se sono in ragione di V a C, bisogna che abbiano eguali altezze T, H, oppure, se sono come T ad H, bisogna che riescano eguali V, C. Fig. 5. Fig. 6.

IV. Similmente i tempi saranno in ragione composta degli spazj, e delle velocità reciprocamente prese. E le velocità avran ragione composta di quella degli spazj, e della reciproca de' tempj, imperciocchè, facendo ancora il rettangolo di quel- Fig. 7.

le linee T, e C, che esprimono il tempo di un moto, e la velocità dell'altro, sarà TC ad HC in ragione de' tempi T, H, ed è la ragione di TC ad HC composta di quella di TC ad TV, e di TV ad HC, delle quali la prima è reciproca delle velocità, essendo come C ad V, e la seconda è la medesima degli spazj; dunque i tempi T, H sono in ragione composta degli spazj S L, e della reciproca delle velocità C, ed V. Similmente VT a CT, si compone dalle ragioni VT a CH, e CH a CT, delle quali la prima è quella degli spazj SL, e la seconda è reciproca de' tempi, cioè come H a T, e però la ragione de' tempi è composta di quella degli spazj, e della reciproca delle velocità, e quella delle velocità è composta di quella degli spazj, e della reciproca de' tempi.

CAPITOLO II.

De' Momenti.

PROPOSIZIONE IV.

Fig. 8. *Se una stessa potenza, ovvero potenze eguali, si applicano a muovere un corpo, o a resistere a qualche moto, colle velocità* V, C, *i loro momenti* M, P *saranno proporzionali alle dette velocità.*

IMperocchè, siccome una tal potenza, colla velocità V ha un tal momento M, così con un altro eguale grado di velocità avrebbe altrettanto momento (Ass. 1.) di manierachè, moltiplicandosi quan-

quanto si voglia la sua velocità, e diventando per esempio 3 V, acquisterebbe detta potenza un momento 3 M, altrettanto moltiplice del primo, e similmente, se la stessa, ovvero un altra potenza eguale, applicandosi colla velocità C, ha un certo momento P, moltiplicandosi la detta velocità, e diventando per esempio 4 C, si moltiplicherebbe altrettanto il suo momento, e diventerebbe 4 P; secondo poi che fosse maggiore la velocità 3 V della velocità 4 C, sarebbe ancora il momento 3 M maggiore di 4 P (per lo stesso Ass. 1.) e se la prima fosse minore, o eguale alla seconda, riuscirebbe pure il terzo minore, o eguale al quarto; dunque dalle quattro quantità V, C, M, P, accordandosi gli egualmente moltiplici della prima, e della terza in superare, eguagliare, o mancare dagli egualmente moltiplici della seconda, e della quarta, sarà V a C, come M a P. Il che &c.

Corollari.

I. Quindi in una stadera, o vette, o altro strumento mobile d'intorno al centro B, se il peso K pendente dal punto C dovrà muoversi da una potenza motrice, applicatavi in varie distanze dal centro del moto, come in D, ovvero in E, tirando in ciascun punto colla medesima direzione perpendicolare, saranno i momenti della potenza proporzionali alle distanze DB, EB; imperciocchè, alzandosi il peso K per l'arco CH, la potenza motrice posta in D si muoverà per l'arco DG, e posta in E, si moverebbe nello stesso tempo per l'arco EF: sicchè gli spazj fatti nel medesimo tempo, essendo come le velocità (Prop. 2.), sarà la veloci-

Fig. 9. 10.

tà

tà della potenza posta in D, alla velocità della medesima posta in E, come l'arco DG, all'arco EF, i quali essendo simili, comecchè opposti allo stesso angolo centrale B, sono come i loro raggi, cioè come le distanze dal centro del moto DB, EB, dunque le velocità, e però i momenti della stessa potenza, sono proporzionali alle distanze dal centro del moto.

II. Quindi si ha la ragione, perchè riesca più facile aprire una porta, o l'imposta d'una finestra, o 'l coperchio d'una cassa, applicando la mano nel luogo più lontano dagli arpioni, o cardini, sopra de' quali deve rivolgersi, che applicandola piu vicino; siccome ancora, perchè gli strumenti di manico più lungo, più comodamente si adoprino, e perchè gli alberi più alti siano più agevolmente sradicati dal vento, che i più bassi in parità di circostanze, e così di mille altri effetti discorrendo, de' quali l'unica universal cagione sì è, perchè cresce il momento della potenza, quando si applica in maggior distanza dal centro del moto, avendo ivi maggior velocità.

PROPOSIZIONE V.

Fig. 11. *Se due potenze disuguali* A, B *si applicano con simili direzione a muovere un corpo, o a resistere al moto con una stessa velocità, i loro momenti* M, P, *saranno proporzionali alle potenze.*

IMperocchè se la potenza A con tale velocità ha il momento M, aggiuntavi un altra eguale potenza ad operare colla stessa velocità, si accrescerebbe altrettanta quantità di momento (per l'Ass. 2.)

l' Afs. 1.), ficchè una tripla potenza, avrebbe triplo momento, ed una quadrupla lo avrebbe quadruplo &c. Presa dunque qualunque moltiplice della prima potenza, per esempio 3 *A*, li corrisponderebbe un momento egualmente moltiplice 3 *M*, e preso il quadruplo della seconda potenza, cioè 4 *B*, avrebbe questa un momento 4 *P*, ed essendo 3 *A*, maggiore, minore, o eguale a 4 *B*, sarebbe altresì 3 *M* maggiore, minore, o eguale a 4 *P*, dunque sta *A* a *B*, come *M* a *P*. Il che &c.

COROLLARIO.

Quindi nella stessa distanza dal centro del moto, dove qualunque potenza applicata, descrivendo lo stesso arco, averebbe la medesima velocità, saranno sempre i momenti proporzionali alle potenze applicate, purchè si muovano colla stessa direzione.

PROPOSIZIONE VI

I momenti M, P *di due potenze* A, B, *operanti colle velocità* V, C, *sono in ragione composta di quella delle medesime potenze, e di quella delle velocità.* Fig. 12.

SUpponga si, che la Potenza *A*, operasse coll' altra velocità *C*, ed avesse un momento *D*, sarà *M* a *D*, come la velocità *V*, alla velocità *C*, (per la Prop. 4) ed il momento *D*, all' altro momento *P*, sarà come *A* a *B* (per la Prop 5.) dunque il momento *M* al momento *P*, avendo ragione composta di *M* a *D*, e di *D* a *P*, sarà in ragione composta di quella della velocità, e di quella delle potenze. Il che &c.

Co-

COROLLARI.

I. Dunque i momenti de' pesi, o delle potenze applicate a qualsivoglia macchina, come vette, stadera, ruota &c mobile d'intorno a qualche centro, sono in ragione composta di quella de i detti pesi, o potenze, e di quella delle loro distanze dal centro del moto, le quali sono come le velocità per le cose dette di sopra.

Fig. 13. II. Se dalle linee *A*, *B* proporzionali alle potenze, e dall'altre *V*, *C* proporzionali alle velocità, si faranno i rettangoli *AV*, *BC*, saranno i momenti come tali rettangoli, avendo ancor questi la ragione composta de' lati (per la Prop. 23. lib. *6.* degli Elem.)

PROPOSIZIONE VII.

Fig. 13. *Quando stia la potenza* A, *colla potenza* B, *come reciprocamente la velocità* C *della seconda, alla velocità* V *della prima, i loro momenti saranno eguali, e qualunque volta due momenti si trovano eguali, bisogna, che le potenze siano reciproche alle velocità loro.*

POichè i momenti, essendo come i rettangoli fatti da ciascuna potenza colla sua velocità, cioè come *AV* a *BC* (per il Coroll. 2. Prop. preced.) e quando *A* sta a *B* reciprocamente come *C* a *V*, risultando detti rettangoli eguali (Prop. 14. lib. *6.* degli Elem.) dunque i momenti, che loro corrispondono sono eguali, e quando sono altresì i momenti eguali, dovendo esser eguali i detti rettangoli, conviene che i lati loro siano reciprocamente

te proporzionali, e però dovrà essere la potenza A alla B, come la velocità C di questa, alla velocità V di quella. Il che &c.

COROLLARI.

I. Sarà dunque equilibrio tra due potenze contrapposte, ed applicate a muovere una macchina mobile intorno a qualche centro, qualunque volta le potenze sieno reciprocamente proporzionali alle distanze loro dal centro del moto, perchè, essendo dette distanze come le velocità, ne risulteranno dall' una, e dall' altra banda eguali momenti, e la macchina rimarrà immobile fra gli sforzi contrarj di tali potenze (per l' Ass. 4.) e qualunque volta la macchina resta immobile, conviene, che le opposte potenze applicatevi sieno reciproche alle distanze dal centro del moto, dovendo avere momenti eguali (per l' Ass. 5.)

II. Ma se la ragione della prima potenza A alla seconda B, fosse maggiore di quella della velocità C alla V, ovvero se la velocità V alla C avesse maggior ragione, che non ha la potenza B alla A, sarebbe allora maggiore il momento di A, che il momento di B, perchè il rettangolo AV, sarebbe maggiore di BC, avendo un lato maggiore di quello che bisognerebbe per eguagliare l' altro rettangolo, cioè più lungo di quello che ricercherebbe la proporzione reciproca di essi lati; onde allora la potenza A dovrà prevalere alla B, e lo stesso dicasi delle distanze dal centro del moto, che sono come le velocità; onde quando si fa l' equilibrio tra due potenze a cui sono reciprocamente proporzionali le distanze dal centro del mo-

to, se si accrescerà da una parte o la distanza, o la potenza, questa averà maggior momento dell' altra, e dovrà prevalerli movendola.

CAPITOLO III.

Del Centro di Gravità.

PROPOSIZIONE VIII.

Un corpo F G *comunque attaccato, o appoggiato ad un sostegno* A, *d' intorno a cui possa liberamente muoversi, allora solamente starà fermo, quando la retta, che connette il centro della terra* C, *col centro di gravità* B, *di esso corpo, passa per lo punto dell' attaccamento, e dell' appoggio* A, *sicchè i tre punti* A, B, C, *sieno in una medesima linea perpendicolare all' Orizzonte.*

Tav. II. Fig. 14.

IMperciocchè per la prima supposizione il centro di gravità di qualunque corpo, cerca di accostarsi quanto mai può al centro della terra: ma quando la retta *CB*, non passa per l' attacco, o per l' appoggio *A*, tirata la retta *AC*, e dal punto *B*, l' orizzontale *BH*, essendo l' angolo *AHB* retto, congiunta la *AB*, sarà l' angolo *ABH* acuto, onde descritto col raggio *AB*, l' arco circolare *BD*, verrà l' arco *BD* sotto l' orizzontale *BH*, da cui esso cerchio è segato, e però il centro *B*, potrà discendere per detto arco *BD*, sotto la detta orizzontale, accostandosi così al centro della terra; dunque non starà mai fermo, se non quando gli tre

tre punti A, B, C, saranno nella medesima retta linea perpendicolare all'orizzonte. Il che &c.

Corollari.

I. Dunque se si sospenderà col filo AD, il corpo $DGEF$, e con esso un filo, da cui penda il piombo C, quando il tutto starà fermo, segnando in detto corpo la retta DE coperta da esso filo, saremo sicuri, che in essa linea DE, ritrovasi il centro di gravità di quel corpo, e di nuovo sospendendo il medesimo corpo per un altro punto F, dal medesimo sostegno A, e similmente segnando in esso la retta FG, coperta dal filo del piombo C, nell' intersezione di ambe queste linee, corrisponderà il centro di gravità B di un tal corpo, dovendo essere in ciascuna di dette linee mostrate dalla direzione AC, che và dal sostegno A, verso il centro della terra. Fig. 15.

II. Se nel corpo $FADEG$ appoggiato sopra un piano stabile, ed orizzontale nella base FG, la retta BH, condotta dal suo centro di gravità B, perpendicolare all' orizzonte, uscirà fuori della base, il corpo caderà, ma se batterà dentro essa base, rimarrà il corpo eretto: perchè nel primo caso la retta, che dal centro di gravità al centro della terra, non passa per verun punto d' appoggio, o di sostegno, ma bensì nel secondo caso. Fig. 16.

III. E così la Torre $FAEG$ se sarà talmente inclinata, che la retta BH, la quale dal suo centro di gravità viene perpendicolare all' orizzonte, non cada fuori del contorno della sua base, potrà stare in piedi, ancorchè fosse da' fondamenti suoi separata, e posata semplicemente sul suolo, purchè al-

altronde ſieno ben collegate, e conneſſe le parti ſue componenti, ſicchè faccia un ſolo corpo, ma ſe la detta perpendicolare caſcherà fuori dell'orlo della ſua baſe, non potrà ſoſtenerſi, ſe non per forza del concatenamento, che potrà avere col ſuolo per mezzo de' fondamenti ſopra de' quali ſi regge.

Fig. 17. IV. Se un corpo *ADF* è poſto talmente ſopra un piano inclinato *EG*, che la retta *BI*, perpendicolare all'orizzonte, tirata dal ſuo centro di gravità *B*, paſſerà per qualche punto della ſua baſe *EF*, verrà giù ſtriſciando per detto piano, ma
Fig. 18. ſe caſcherà fuori di eſſa baſe, ſi rivolterà il corpo per detto piano, perchè il centro di gravita potrà maggiormente diſcendere rivoltandoſi il corpo mobile, e quindi è, che una sfera ſempre diſcen-
Fig. 19. derà per un piano ravvolgendoſi in ſe medeſima, e non placidamente ſtriſciando, perchè la retta *BH*, che va perpendicolare all'orizzonte tirata dal ſuo centro, fa ſempre angolo acuto col piano inclinato *GF*; onde non può paſſare per lo contatto *F* della palla col piano, nè convenire colla retta *BF*, che connette il centro di gravità di eſſa palla col ſuo appoggio *F*, e ſempre è perpendicolare al detto piano inclinato, e non all'orizzonte, e però non paſſa pel centro della terra.

PROPOSIZIONE IX.

Propoſti due corpi A, B, *trovare il loro centro di gravità*.

Fig. 20. SI connetta il centro particolare di gravità di ciaſcuno colla retta *AB*, e queſta dividaſi in *C*, la ragione reciproca a' medeſimi corpi; cioè a' lo-
ro

ro pezzi, onde ſtia A a B, come BC a CA: dico, che C è il centro comune di gravità d' ambedue i corpi propoſti.

Perchè inteſa la retta AB, come un filo rigido, che gli connetta, e ſoſtenendoſi il punto C, averanno i corpi A, e B egual momento, d' intorno al centro C (per il Coroll. primo della Prop. 7) dunque (per la Defin. 11.) ſarà C il centro di gravità d' ambidue.

Corollari.

I. Quindi è chiaro, che il centro di gravità di due corpi è nella retta, che congiunge i loro centri particolari, e che ſe una retta condotta per lo centro comune di due corpi paſſa per lo centro particolare di uno di eſſi, doverà ancora paſſare per lo centro dell' altro.

II. Volendo trovare il centro di gravità di tre corpi, o di più ancora, trovato il centro C, di due A, B, ſi connetta col centro del terzo corpo D, e diviſa la retta CD in E, di maniera che ſia DE, ad EC, come l' aggregato de' corpi A, B, al corpo D, ſarà E il centro di queſti tre corpi; imperocchè ſoſpendendoſi dal punto E un filo rigido DC, ſaranno in equilibrio i due corpi AB col terzo D, eſſendo quegli a queſto, come reciprocamente la diſtanza DE alla CE. Fig. 14.

III. Se ſi attribuiſce la gravità ancora alle linee, ed alle ſuperficie, è manifeſto, che il centro di gravità d' una linea retta, è nel mezzo di eſſa, e che di una circonferenza di circolo, ed ancora del piano di eſſo, il centro di gravità è il medeſimo, che il centro di tal grandezza; e lo ſteſſo può dirſi

di qualunque superficie sferica, siccome delle sfere medesime, essendo d'intorno al detto punto per ogni verso parti eguali, dotate di eguale gravità, ed in distanza eguale dal centro, avendo eguale momento. Anzi in qualunque figura piana, o solida, avendo un diametro, che tagli per mezzo tutte le sue ordinate, o che passi per lo centro di tutte le sue sezioni parallele, il centro di tale figura sarà in esso diametro, e però quando vi siano due diametri diversi concorrenti in un punto, il centro di gravità di tal figura, sarà in detto concorso, dovendo essere in ciascheduno di essi diametri, sopra i quali reggendosi, tutte le ordinate fanno equilibrio, essendo divise per mezzo, oppure avendo il loro centro in detti diametri.

IV. Specialmente in ogni triangolo ABC, diviso per mezzo un lato AB, in E, se si congiunge coll'angolo opposto la CE, e diviso un'altro lato AC per mezzo in D, congiungendo all'angolo opposto la BD, il concorso di questa coll'altra CE, cioè il punto F, sarà il centro di gravità di esso triangolo, e sarà sempre la parte del diametro FD, verso la base AC, un terzo di tutta la DB, e così FE un terzo di tutta la EC. Imperocchè congiunta la DE, sarà parallela a CB, segando per mezzo amendue gli altri lati, e sarà CB doppia di DE, siccome CA è dupla di AD; ma per la similitudine de' triangoli CFB, DFE, sarà BF, ad FD, come CB a DE; dunque BF è dupla di FD; onde questa sarà un terzo di tutta la DB.

Fig. 22.

V. Nello stesso modo si potrà ritrovare il centro di qualunque figura rettilinea, risolvendola in triangoli, e congiungendo i loro centri di gravità, poi

poi dividendo la linea, che gli connette in ragione reciproca di essi triangoli.

VI. Per trovare il centro di gravità di una Piramide triangolare *ABCD*, si tirino gli diametri *CE*, *AE* de' due triangoli *BCD*, *ABD*, e tagliate le parti *EH*, *EF* di detti diametri, che sieno un terzo di essi, congiunte *CF*, *AH*, le quali si segheranno in *I*, sarà questo *I* centro di gravità di essa Piramide; imperocchè passando *AH* per lo centro di gravità delle base *BDC*, passerà per gli centri di gravità di tutte le sezioni triangolari parallele a detta base, onde il centro della Piramide dovrà essere in essa *AH*, ma deve essere ancora nell' altra *CF*, la quale passando per lo centro di gravità del triangolo *ABD*, passa ancora per tutti gli centri delle sezioni parallele ad esso *ABD*, dunque nel concorso *I* delle rette *AH*, *CF*, si troverà il centro di essa Piramide, ed è lontano dalla base per la parte *IH*, che è un quarto di tutta la *AH*; imperocchè congiunta *HF*, essendo simili i triangoli *FIH*, *AIC*, sarà *AI* ad *IH*, come *AC* ad *FH*, o come *AE* ad *EF*, e però *AI* è tripla di *IH*, onde *AH* sarà quadrupla di essa *IH*.

Fig. 13.

VII. Anche in un cono il centro di gravità sarà nella quarta parte dell' asse verso la base, potendo il cono risolversi in una Piramide di base Poligona d' innumerabili lati, e qualunque Piramide, che abbia per base un Poligono averà il centro distante dalla sua base per un quarto dell' altezza del proprio asse, potendo risolversi in molte Piramidi triangolari, il cui centro è sempre lontano dalla base un quarto del suo asse, e però è in un piano parallelo alla medesima base, condotto per la quarta parte dell' asse di mezzo.

PROPOSIZIONE X.

Fig. 24. *Se in due libre eguali* AB, FH *si dispongono alcuni pesi omogenei nell' una, ed altri tra di loro omogenei nell' altra, in maniera che, essendo attaccati in distanze eguali, sieno proporzionali, ovvero, se le libre* AB, FH *fossero disuguali, ed i pesi nell' una, proporzionali a' pesi nell' altra, fossero disposti in distanze proporzionali alle medesime libre, il centro di gravità della prima, dividerà nella stessa ragione la lunghezza di essa libra, come il centro di tutti i pesi della seconda, dividerà la lunghezza di essa.*

IMperocchè essendo *A* a *C*, come *F* ad *E*, se delle due prime il centro di gravità è *S*, e delle due seconde il centro sia *R*, sarà *SC* ad *SA*, come *A* a *C*, cioè come *F* ad *E*, e però come *RE* ad *RF*; onde componendo *CA* ad *AS*, sarà come *EF* ad *FR*, onde nelle libre eguali essendo *AC*, eguale ad *FE*, sarà ancora *AS* eguale ad *RF*, e nelle libre disuguali essendo *AC* ad *FE*, come tutta la *AB* a tutta la *FH*, ancora *AS* ad *FR*, sarà nella medesima proporzione. In oltre se *M*, ed *N* sono i centri delle tre grandezze *A*, *C*, *D*, e delle tre altre *F*, *E*, *G*, sarà *MS* ad *MD*, come la grandezza *D* alle due *A*, *C*, cioè come la grandezza *G*, alle due *E*, *F*, che si suppongono proporzionali alle altre, e però ancora come *RN* ad *NG*, così sarà *SM* ad *MD*, ed invertendo, e componendo *DS* ad *SM*, sarà come *GR* ad *RN*, onde essendo la prima alla terza eguale, o proporzionale, come *AB* ad *FH*, ancora la seconda sarà eguale, o proporzionale alla quarta, e però aggiunte *AS*, *FR*, che so-

ſono pure eguali, o proporzionali, ſarà altresì MA eguale, o proporzionale ad NF: con ſimil progreſſo ſi proverà parimente, che il centro comune di più grandezze diſpoſte nella prima libra, ed il centro comune dell' altre proporzionali nella ſeconda libra, dividono eſſe libre egualmente, ſe ſono eguali, o in parti proporzionali ad eſſe, ſe ſono diſuguali, che però, eſſendo P il centro di tutte quattro le grandezze A, C, D, B, ed eſſendo Q il centro delle altre quattro F, E, G, H, proporzionali alle prime, ſarà AB ad FH, come AP ad FQ. Il che &c.

COROLLARI.

I. Quindi nelle ſigure egualmente alte, le cui ſezioni parallele alla baſe ſiano proporzionali (le quali ſi chiamano da' Geometri figure *Analoghe*) i loro centri di gravità ſaranno nel loro diametro, egualmente diſtanti dalle baſi, eſſendo detti diametri come libre, cariche della gravità di dette ſezioni parallele per lo centro di cui paſſano, ed è il medeſimo il centro di gravità di eſſe figure, che il centro di gravità di tutte quante quelle ſezioni. Onde quindi appariſce, che il centro di gravità del cono, egualmente è diſtante dalla baſe per un quarto del ſuo Aſſe, come il centro di gravità di qualſivoglia Piramide, perchè le ſezioni delle Piramidi parallele alla baſe, ſono proporzionali a' cerchi, che ſegano il cono in eguale diſtanza, e così ancora un Conoide Parabolico $EDCBA$ ha il centro di gravità diſtante dalla baſe per l'intervallo IN, che è un terzo dell' Aſſe CI, uguale alla diſtanza del centro di gravità del triangolo ECA, egualmen- Fig. 25.

te alto, perocchè nel triangolo ſta *EA* ad *FG*, come *IC* a *CH*, o come il quadrato *IE*, al quadrato dell'ordinata *DH* nella parabola, e però ſta come il cerchio *EA* al cerchio *BD* del Conoide.

II. Similmente, quando le figure hanno le loro ſezioni proporzionali, le quali dividono proporzionalmente i loro diametri diſuguali, i loro centri di gravità ſaranno diſtanti dalle loro baſi proporzionalmente alle loro altezze, come per eſempio, eſſendo due Parabole *BAH*, *CAD*, i loro centri di gravità ſaranno lontani dalle baſi in certe diſtanze proporzionali alle altezze *AB*, *AC*, perchè congiunta la retta *BC*, e tiratali una parallela *GE*, e condotte l'ordinate *GI*, *EF*, eſſendo *CA* ad *AE*, come *BA* ad *AG*, e nella prima ragione eſſendo il quadrato *CD*, al quadrato *EF*, e nella ſeconda il quadrato *BH* al quadrato *GI*, ſono adunque proporzionali l'ordinate *CD*, *EF* alle ordinate *BH*, *GI*, le quali ſegano proporzionalmente l'altezze *CA*, *AB*, onde ſiccome nella Parabola *CAD* il ſuo centro di gravità ſarà diſtante dalla baſe per due quinti dell'altezza *AC*, così il centro di gravità dell'altra *BAH*, ſarà diſtante dalla baſe per due quinti dell'altezza *AB*.

Fig. 26.

PROPOSIZIONE XI.

Fig. 27.

Eſſendo più grandezze A, B, D *ſopra la retta* HL, *ſopra cui ſi conducono da i loro centri particolari, e dal comune* K *le rette* AH, BM, DL, KI *tra di loro parallele, o perpendicolari ad eſſa* HL, *ſaranno i prodotti di ciaſcheduna nella ſua diſtanza, cioè* A *in* AH, B *in* BM, *e* D *in* DL, *eguali al prodot-*

dotto di tutte insieme le grandezze A, B, D *nella distanza* KI *del loro centro comune*.

Sia delle due *A*, *B* il centro *C*, e conducasi *ECF* parallela ad *HL*, segante le rette *AH*, *BM*, ne punti *E*,*F*, sarà per la similitudine de' triangoli *AE* a *BF*, come *AC* a *CB*, cioè come *B* ad *A*, dunque il prodotto dell'estreme *A* in *AE* eguaglia il prodotto delle medie *B* in *BF*, ed è quello l'eccesso di *A* in *AH* sopra il prodotto di *A* in *CG*, che eguaglia la *EH*, ed il secondo l'eccesso di *B* in *CG*, che eguaglia la *FM* sopra il prodotto di *B* in *BM*; dunque sono Aritmeticamente proporzionali *A* in *AH*, *A* in *CG*, *B* in *CG*, *B* in *BM*, e però la somma delle estreme *A* in *AH*, *B* in *BM* eguaglia la somma delle medie *A*, e *B* in *CG*. Nella stessa maniera si proverà, che poste *A* e *B* insieme nel suo centro *C*, il prodotto di *A*, e *B* in *CG*, col prodotto della grandezza *D* in *DL*, eguaglieranno il prodotto di *A*,*B*, e *D* nella *KI*; dunque i prodotti di *A* in *AH*, di *B* in *BM*, e della *D* in *DL*, eguagliano il prodotto di *A*, *B*, *D*, in *KI*, e così sempre quando vi fossero più grandezze. Il che &c.

I. Se la retta *HL* passasse per lo centro *K* di più grandezze *A*, *B*, *R*, *D*, i prodotti di *A* in *AH*, e di *B* in *BM*, che sono da una parte, eguaglieranno i prodotti di *R* in *RT*, e della *D* in *DL*, che sono dalla parte opposta; imperocchè dal centro *C* delle due *A*. *B*, e dal centro *P* delle altre *R*, *D* condotte parallele *CG*, *PV* saranno i prodotti di *A* in *AH*, e di *B* in *BM*, eguali al prodotto di *A*, e di *B* nella *CG*, il quale prodotto eguaglierebbe quello di *R*, e di *D* in *PV*, e questo sarebbe eguale ad *R* Fig. 28.

in RT, e a D in DL; dunque i prodotti A in AH, e B in BM eguagliano gl' altri R in RT, e D in DL.

Tav. III. Fig. 29. II. Se poi la retta HL, avesse da una parte alcune grandezze R, D, e dall' altra le grandezze A, B col centro K comune a tutte, sarà l' eccesso de' prodotti A in AH, e B in BM, sopra agli opposti prodotti R in RT, e D in DL, eguale al prodotto di tutte le grandezze A, B, D, R, nella distanza KI del centro loro comune: perchè condotta per K la EF, parallela ad HL, segante esse rette in E, G, V, F, saranno in A in AE, con B in BF, cioè A in AH, e B in BM, meno A, e B in KI, eguali a' prodotti di R in RG, e della D in DV, gli quali sono i medesimi, che R in RT, e D in DL, con R e D in KI; dunque A in AH con B in BM meno R in RT, e D in DL, eguaglia il prodotto di A, B, R, D in KI.

Fig. 30. III. Se le grandezze A, B, D, R col loro centro comune C, saranno in una stessa linea retta, in cui si pigli un punto E, oltre tutte le grandezze, la somma de' prodotti A in AE, B in BE, R in RE, e D in DE, divisa per l' aggregato di esse grandezze A, B, R, D, ci darà per quoziente la distanza CE del loro centro comune da esso punto E; ma se questo punto E, sarà tramezzo alle dette gran-

Fig. 31. dezze, la differenza de' prodotti A in AE, e B in BE, da' prodotti R in RE, e D in DE, divisa parimente per l'aggregato di tutte le grandezze $A, B\ R, D$ ci darà la CE; imperocchè questa moltiplicata in tutte le dette grandezze, eguaglia la somma nel primo caso, e la differenza nel secondo de' suddetti prodotti per gli antecedenti Corollarj.

IV. Se tutte le grandezze fussero eguali, il prodotto di tutte nella distanza del loro centro comu-

mu-

mune, eguaglierebbe il prodotto di una di loro, in una retta moltiplice di detta diſtanza, ſecondo il numero di eſſe grandezze, ed ancora gli prodotti di ciaſcheduna di eſſe, nelle loro diſtanze, ſarebbe eguale al prodotto di una nell' aggregato di tali diſtanze. Biſogna dunque, che la ſomma di tutte queſte diſtanze, ovvero la loro differenza, eguagli il moltiplice della diſtanza del centro, ſecondo il numero di eſſe.

V. Onde eſſendo dette grandezze eguali, tirata per lo centro comune K la retta HF, ſopra cui ſi conducano le perpendicolari da eſſe grandezze, ſaranno quelle di ſopra AE, BF, eguali a quelle di ſotto GC, DH, e tirando per eſſo punto K, qualſivoglia altra linea KL, ſopra di cui ſi tirino altre perpendicolari, o parallele, quelle che ſono alla deſtra AI, DO eguaglieranno quelle, che ſono alla ſiniſtra CL, BM. Fig. 32.

VI. Ed eſſendo le Periferie circolari, proporzionali a' loro raggi, girando le grandezze A, B, D, C intorno la medeſima retta HF, i prodotti delle grandezze poſte da una parte nelle loro circonferenze, eguaglieranno i prodotti delle altre nelle Periferie da loro deſcritte, e la ſomma de' prodotti di quelle, che ſono da una parte nelle loro Periferie, eguaglierà il prodotto di tutte eſſe grandezze, nella Periferia deſcritta dal comune loro centro di gravità, onde ſi cava, che una ſuperficie rotonda nata dal giro di qualche curva, ſarà eguale al prodotto di eſſa curva nella Periferia del centro di gravità di eſſa, deſcritta in quel moto rotondo; ed un ſolido rotondo deſcritto da una ſuperficie $DGAH$, girata intorno l' aſſe DH, egua- Fig. 33.

glia

glia il prodotto di essa figura nella Periferia *IP*, dal suo centro di gravità *I* descritta, eguagliando questa tutti i prodotti di qualunque parte *K*, *L* nelle loro Periferie *KQ*, *LN*, e però la ragione di più superficie, e di più solidi rotondi, che nascono dal girare diverse linee, o diverse superficie, sono sempre in ragione composta di quella di esse linee genitrici, o delle superficie girate, e di quella delle distanze de' loro centri di gravità dell' asse del moto.

CAPITOLO IV.

Del Moto Composto di più Moti Equabili.

PROPOSIZIONE XII.

Fig. 34. *Se un mobile* A, *sarà spinto nello stesso tempo da una forza per la direzione* AD, *e da un altra per la direzione* AG *inclinata a qualche angolo colla prima, tagliando in esse le parti* AD, AG *proporzionali alle velocità impresse nel mobile, secondo le dette direzioni, ovvero proporzionali alle forze stesse, supposto, che imprimasi da ogn'una tutta quella velocità, che nello stesso tempo può dare, e però proporzionali alle dette velocità, si compisca il parallelogrammo* DAGB, *e si tiri il Diametro* AB: *dico, che il mobile anderà per la direzione* AB *con tale velocità, che starà a ciascheduna altra impressali da dette forze, come il medesimo Diametro* AB *a det-*

a detti lati corrispondenti all' altre velocità impressili.

PEr maggior chiarezza si distinguano i soggetti di questi due moti componenti, attribuendo il moto per la direzione *AD* ad una riga, che per essa *AD* si muova parallela a se stessa, promovendosi successivamente dal sito *AG* nel sito *EH*, e quindi passando in *BD* colla velocità *AD*. Il moto poi per *AG* si rifonda in una mosca, o formica, o altro mobile, che intanto scorra per essa riga colla velocità *AG*. E' manifesto, che in vigore di questi due moti nello stesso tempo, in cui la riga averà scorso lo spazio *AE*, passando da *AG* in *EH*, la formica nella riga mobile averà passato lo spazio *EC*, il quale starà allo spazio *AE*, come la velocità *AG*, alla velocità *AD*, (per la Prop. 2.); onde compiendo il parallelogrammo *AECF*, sarà questo simile all' altro *ABDG*, onde (per la 26. del lib. 6. degli Elem.) l' angolo *C*, in cui si troverà la formica trasportata da questi due moti, sarà sempre nello stesso diametro *AB*; dunque il moto composto d' ambidue riesce per la direzione *AB*, e perchè nello stesso tempo si compirà il moto *AB*, ed il moto particolare della riga per *AD*, e della formica per *AG*, sarà dunque la velocità di tal moto composto *AB*, alle velocità impresse per i lati *AD*, *AG*, come il diametro *AB* ad essi lati. Il che &c.

COROLLARI.

I. Viceversa, qualunque semplice moto per *AB* potrà sempre risolversi in due altri *AD*, *AG*, secon-

condo le direzioni de' lati d' un parallelogrammo descritto intorno il diametro AB, supponendo, che per le dette direzioni fosse spinto il mobile con velocità proporzionali a detti lati, in relazione di quella, che è per la AB; imperocchè nel medesimo tempo si farà dal mobile il detto viaggio, essendo semplicemente spinto per AB, come se fosse spinto per le due altre direzioni de' lati con velocità ad essi proporzionali.

II. Anzi lo stesso moto per AB può intendersi composto in infinite maniere, potendosi concepire sopra la base AB qualunque triangolo ADB, ovvero AHB, e compiendosi i parallelogrammi $ADBG$, $AHBC$, tanto potrà dirsi il moto per AB composto da' moti collaterali AD, AG, quanto dagli altri due AH, AC, secondo le velocità espresse da' medesimi lati, in relazione a quella del moto per AB.

Fig. 35.

III. Onde è chiaro, che il moto composto AB talora può esser maggiore di ciascheduno de' suoi componenti, e talora minore di ciascheduno di essi, ma non mai eguale, o maggiore d' ambidue presi insieme, essendo sempre due lati d' un triangolo, AD, BD, maggiori del terzo AB, e però ancora AD con AG (il quale eguaglia DB) devono esser maggiori del composto moto AB.

SCOLIO.

Si avverta però, che se i moti componenti AD, AG sono ad angoli retti, sarà l' uno indifferente all' altro, senza che l' uno tolga, o aggiunga all' altro veruna parte di moto per la sua direzione, ma quando sono ad angoli obliqui, come AD, AI,

ad

ad angolo ottuso, ovvero AH, AC ad angolo acuto, l'uno de' moti porta qualche alterazione all'altro, essendo nel primo caso in qualche maniera opposti, cioè diretti alle parti AI contrarie in riguardo al punto A d'onde si parte il mobile, ma nel secondo caso in qualche modo cospirano verso i termini A, e B posti dalle medesime parti del punto A, d'onde si suppone partire il mobile; e però è meglio risolvere il moto AB ne' moti AD, AG posti ad angoli retti, che in qualunque altra delle infinite maniere di moti obliqui, essendo la prima composizione più naturale della seconda.

PROPOSIZIONE XIII.

Se un mobile è spinto da quante si vogliano forze, per altrettante direzioni: trovare la direzione, e la velocità del moto composto, che ne deve risultare. Fig. 36.

Siano le direzioni BA, CA, DA tagliate nella stessa proporzione delle velocità impresse al mobile A, se queste sono sopra una medesima linea retta, e dirette alla medesima parte, si prenda AG eguale alla somma di tutte l'altre BA, CA, DA, sarà questa AG la direzione, e velocità di tutte le forze proposte, che cospirano a spingere il mobile verso la medesima parte, ma se alcune spingono verso una parte, come BA, CA, ed un'altra DA spinge all'opposto, se fosse AD eguale alle altre due AC, AB, il mobile A, starebbe immobile, e però non ne risulterebbe alcun moto (per l'Ass. 4.): ma se sono disuguali quelle, che spingono da una parte, a quelle che spingono dall'altra opposta, pigliss AG, eguale all'ecces- Fig. 37.

cesso delle due AB, AC, sopra l'altra contraria AD, sarà essa AG, diretta verso la parte a cui spingono le forze prevalenti, la direzione, e la velocità del moto composto; imperocchè solamente l'eccesso delle maggiori velocità AB, AC sopra la contraria AD, può avere il suo effetto, essendo le parti eguali contrarie, adattate a reprimere il moto, e tenere in quiete il mobile A; ma se finalmente le date direzioni non sono nella medesima linea retta, ma inclinate a varj angoli, o nello stesso piano, o in diversi piani, se ne compongano due insieme AB, AD, con fare il parallelogrammo $ADBE$, e tirato il diametro AE, che mostra la direzione composta di quelle due, si componga colla terza AC, facendo il parallelogrammo $EACG$, sarà la direzione, e velocità AG, composta di tutte tre le AB, AC, AD, come è manifesto dall'antecedente proposizione, e se vi fossero altre direzioni, con cui fosse spinto il mobile, similmente componendo la composta AG, colle altre, si troverebbe la direzione, e la velocità composta di tutte. Il che &c.

Fig. 38.

Corollari.

I. Se fusse il punto I centro di gravità de' punti B, C, D, cioè di gravi eguali posti in quei termini, a cui sono dirette le forze, che spingono il mobile A; congiunta la retta AI, e fatta AG moltiplice di AI, secondo il numero di tali punti, cioè in questo caso tripla, sarà essa AG la direzione, e velocità ricercata; imperciocchè condotta per lo punto A qualunque retta LM, sopra cui siano tirate le perpendicolari CL, BM, DP, IO,

Fig. 39.

è ma-

è manifesto (dal Coroll. 4. della Prop. 11.) che la somma, o la differenza delle perpendicolari *CL*, *BM*, *DP*, è tripla della perpendicolare *IO*, e che la somma, o la differenza delle distanze *AM*, *AL*, *AP*, (s'intende la somma di quelle, che sono dalla medesima parte, ovvero la differenza di quelle, che sono da una parte, e di quelle che rimangono dalla parte opposta) è tripla della distanza *OA*; ma condotta la perpendicolare *GN*, e compiuto il rettangolo *ANGS*, sarà *GN* tripla di *IO*, ed *AN*, ovvero *GS*, tripla di *AO*, per la similitudine de' triangoli *AIO*, *AGN*, in cui *GA* si è fatta tripla di *AI*; dunque la direzione, e velocità *AG* è quella stessa, che deve risultare al mobile *A*, sollecitato dalle velocità, e direzioni *AB*, *AC*, *AD*, essendo *AG* composta di *AN*, eguale alla somma, o alla differenza delle velocità, che risultano per la direzione *AN*, e dalla *GN*, parimente eguale alla somma delle velocità conspiranti secondo la perpendicolare *AS*, o alla differenza di esse direzioni, e velocità contrarie.

II. Se oltre le forze suddette *AB*, *AC*, *AD*, vi fosse un' altra forza *AH*, che spingesse il mobile secondo la direzione opposta a quella *AG*, che si compone delle tre prime, e con velocità eguale ad essa, è manifesto, che il mobile *A* rimarrebbe in equilibrio fra tutte queste forze, essendo eguale la velocità *AH* alla velocità *AG*, risultante dall' altre.

III. Se il centro di gravità dei punti *B*, *C*, *D*, cadesse nel punto *A*, il mobile rimarrebbe immoto, non essendovi veruna distanza *AI* il cui moltipli-

tiplice dovrebbe fare la direzione, e la velocità del moto composto, e però rimarrebbe in equilibrio il mobile tra le forze, che lo spingono per varie vie.

IV. E per ragione conversa, se il mobile tra più forze, che lo vanno spingendo, consiste immobile, bisogna, che esso mobile si trovi collocato nel centro di gravità de' termini *B*, *C*, *D* a cui nello stesso tempo vorrebbero spingerlo quelle forze, perchè se il centro di gravità di essi punti fosse fuori del centro *A*, per esempio in *I*, dovrebbe muoversi il mobile per la direzione *AIG*, posta *AG* moltiplice di *AI* secondo il numero di detti termini, cioè di dette forze.

PROPOSIZIONE XIV.

Fig. 40. *Se il mobile* A *sta in equilibrio fra le tre forze* E, P, F, *che lo tirano per le direzioni* AC, AD, AB; *prolungando una di esse per esempio* AD *oltre l'angolo* CAB, *ed in essa preso qualsivoglia punto* G, *tirate le* GB, GC, *parallele all'altre direzioni, onde risulti il parallelogrammo* BACG, *saranno le forze* E, P, F, *come i lati* AC, AB, AG, *di esso parallelogrammo*.

IMperocchè, stando equilibrate le forze suddette, bisogna, che due qualunque di esse, per esempio *F*, ed *E*, contrastino con eguale sforzo contro la terza *P*, imprimendo nel mobile una velocità eguale a quella, che viene impressa dalla forza *P*; ma diretta alla banda opposta per eluderne ogni effetto (secondo l'Ass. 5) ma alla direzione della forza *P*, che tira per *AD*, niuna altra

tra direttamente si oppone, se non questa AG, dunque bisogna, che lo sforzo d'ambedue le forze E, F, ritiri il mobile A, appunto per la direzione AG, ma queste forze tirano il mobile secondo il diametro d'un parallelogrammo, fatto sopra i lati delle loro direzioni, e proporzionali alle medesime forze, e velocità, che s'imprimono da esse, dunque bisogna, che la retta AG, opposta alla direzione AD, dell'altra forza P, sia il diametro d'un parallelogrammo fatto nell'angolo BAC, co' lati proporzionali alle stesse forze E, F, o alle velocità da loro impresse, non potendo servire la linea AG per diametro d'altri parallelogrammi fatti nell'angolo BAC, fuorichè al medesimo $BACG$, o ad altri simili ad esso, che averebbero i lati, ed il diametro nella stessa proporzione; dunque bisogna, che AB, ed AC, sieno proporzionali alle forze F, E, ed AG, proporzionale all'altra P. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se un corpo PH, il cui centro X, è sospeso da due funicelle PE, HF non perpendicolari all'orizzonte, e però tra di loro non parallele, le quali prolungate converrebbero in G, bisogna, che la direzione AX del centro di gravità di tal corpo, che è perpendicolare all'orizzonte, convenga con l'altre due direzioni nel medesimo punto G. Imperocchè dovendosi fare equilibrio tra le forze sostenenti E, F, ed il peso di esso corpo, bisogna, che la direzione di questo sia per il diritto al diametro AG del parallelogrammo fatto sopra dette direzioni delle forze sostenenti, in cui cospirano le direzioni BG. CG di dette forze.

Tav. IV. Fig. 41.

II. Similmente date tre forze *F*, *E*, *P*, due delle quali sieno maggiori della terza, si troveranno le direzioni per cui sarebbero in equilibrio, con fare un triangolo *ABG* di lati proporzionali alle dette forze, e compiendo il parallelogrammo *BACG*: perchè allora essendo dette direzioni *AB*, *AC* proporzionali alle forze *F*, *E*, le quali secondo la direzione *AG*, composta di esse, tirerebbero il punto *A* verso *G*, se la potenza *P* proporzionale ad *AG*, s' intenderà tirare per l'opposta direzione, staranno in equilibrio: oppure basterebbe fare un triangolo *ILK* di lati parimente proporzionali alle date forze, e sopra ciascuno di essi tirando le perpendicolari *GR*, *GM*, *GO*, dalle quali risulterà il parallelogrammo *ABGC*, e saranno determinate le direzioni, per cui dette forze staranno in equilibrio. Imperocchè allora il triangolo *ILK*, sarà simile a ciascheduno degli altri due *ABG*, *ACG*, perchè essendo retti gli angoli *GRK*, *GOK*, un cerchio passerebbe per gli punti *G*, *R*, *O*, *K*, onde l'angolo *OKR* uguaglierebbe l' angolo *OGR*, ed essendo ancora gli angoli *LMG*, *LRG* retti, saranno similmente eguali gli angoli *MLR*, *NGR*, ovvero l'alterno *BAG*, dunque i due angoli *K*, *L* eguagliando gli due *G*, *A*, essi triangoli sono simili.

Tav. III. Fig. 40. Tav. IV. Fig. 42.

III. Si osservi, che le stesse potenze *F*, *E*, *P*, sono come i seni degli angoli opposti alle loro direzioni, essendo come i lati *GC*, *AC*, *AG*, i quali sono proporzionali a' seni degli angoli opposti, secondo un notissimo Teorema della trigonometria.

Tav. III. Fig. 40.

CAP.

CAPITOLO V.

Delle Macchine, che facilitano il Moto.

PROPOSIZIONE XV.

Sia un vette ACB *mobile intorno al punto fisso, o sostegno* C, *e le forze* G, P, *applicate a punti* A, B, *lo tirino per le direzioni* AF, BH, *comunque inclinate alle braccia di detto vette, e stiano in equilibrio: se dal sostegno si tireranno le perpendicolari* CF, CD *sopra le dette direzioni, sarà la forza* G, *alla forza* P *reciprocamente, come la perpendicolare* CD, *all'altra* CF.

Tav. IV. Fig. 43. 44.

CONcorrino le direzioni *AF*, *BH* nel punto *E* (quando non sieno parallele, nel qual caso converrebbero in un punto *E* infinitamente lontano, ed allora, o sarebbero le dette perpendicolari, le medesime *CA*, *CB*, o gli sarebbero proporzionali per la similitudine de' triangoli *ACF*, *BCD*; onde essendo *G* a *P*, come reciprocamente *BC* a *CA*, sarebbero le dette forze reciproche alle medesime perpendicolari) e si congiunga la retta *CE*, questa sarà necessariamente la direzione della forza, che fa il sostegno nel reggere la pressione cagionatale dalle forze *G*, *P*; Imperciocchè tirate le rette *CH*, *CK*, parallele alle direzioni *AF*, *BD*, il parallelogrammo *CHEK*, dimostrerà le direzioni *AF*, *BD*, e la proporzione delle forze *P*, *G*, ne' lati *EH*, *EK*, e però il diametro *CE*, dimostra la direzione, e la forza del sostegno *C*, che si equilibra, con amendue le dette potenze, e perchè

Fig. 44.

Fig. 43.

gli triangoli *CHE*, *CEK* sono eguali, le loro basi *HE*, *EK* sono reciprocamente come le altezze *CF*, *CD*, dunque, essendo *P* a *G*, come *HE* ad *EK*, bisogna, che stia *G* a *P*, come reciprocamente la perpendicolare *CD* alla perpendicolare *CF*. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se la forza *P* ora tirerà perpendicolarmente per la direzione *RB*, ed ora obliquamente per la direzione *BL*, il suo momento nel primo caso, all' altro nel secondo, sarà come il braccio *CB*, alla perpendicolare *CD* tirata sopra l'altra *BL*. Imperciocchè si equilibri la forza *P* nel primo caso colla forza *G*. e nel secondo colla forza *N*, sarà *P* a *G*, come *AC* a *CB*, e nell' altro caso, sarà *N* a *P*, come *CD* a *CA*, dunque sarà *G* ad *N*, come *CB* a *CD*, ed è la ragione di *G* ad *N* la medesima, che de' loro momenti, e però ancora de' momenti a loro eguali, cioè di *P*, quando tira per la direzione *BR*, e del medesimo *P* tirante per la direzione *BL*, dunque questi momenti sono come *CB* alla perpendicolare *CD*. (Fig. 45.)

II. Se il vette *AB* è sostenuto orizzontalmente in ambi gli estremi *A*, *B*, ed al punto *C* sia applicato il peso *D*, la forza che esercita il sostegno *A* a quella, che esercita il sostegno *B*, sta reciprocamente, come la distanza *CB* alla distanza *CA*. (Fig. 46.)

III. Ma se il detto vette è sostenuto con qualche inclinazione all' orizzonte, come quando con esso si portasse sopra una scala, o sopra la salita di un monte il peso *D* attaccato al punto *C*, suppo- (Fig. 47.)

posto, che la potenza A, alla potenza B, ed al peso D, fosse, come le linee AF, FB, AB, fatto un triangolo AFB, e circoscrittogli un cerchio, il quale sia segato dalla direziooe FC di esso peso nel punto H, congiunte AH, BH, doveranno le dette forze sostenere gli estremi del vette secondo le direzioni AH, BH; imperocchè compiuto il parallelogrammo $ICGH$, sarà l'angolo CHI eguale all'angolo BAF, e l'angolo ICH eguale all'alterno GHC, eguaglierà l'altro ABF, per essere nel medesimo segmento, e però il triangolo HIC, sarà simile al triangolo BAF. Onde siccome i lati BF, FA, e la base AB eguaglieranno le forze da applicarsi in B, ed in A, ed il peso D, così ancora i lati CI, IH, cioè GH, HI, sono proporzionali alle dette forze, ed il diametro HC, al peso da sostenersi; onde con tali direzioni dovrà portarsi esso peso per mezzo del vette AB inclinato all'orizzonte.

PROPOSIZIONE XVI.

Come si possa sostenere un gran pezzo da più persone con più d'un vette.

PEr esempio dovendosi portare da tre persone A, E, C, il peso D con due vetti, pigliato il vette EC retto dalle forze E, C di due persone supposte eguali, e dividendolo per mezzo in F, vi si appoggi l'estremo di un'altro vette AF da raccomandarsi alla forza di una terza persona eguale nel termine A, e dividasi AF in B, sicchè AB sia doppia di BF, aggiunto il peso D in B, sarà retto dalle tre forze E, C, A, perchè come AB a Fig. 48.

 BF,

BF, così la parte del peso D, retta in F, alla parte sostenuta in A; dunque in F premono due terzi del peso, sostenuti dalle due persone E, C, ed un terzo solo è sostenuto in A dalla terza persona; onde tutte tre egualmente sono caricate per sostenere esso peso. Se poi fossero quattro persone, che dovessero sostenere il peso D, eguale alle lor quattro forze, si potrà con tre vetti AH, EC, GF, sostenere il peso D, applicato nel punto B di mezzo al terzo vette GF, appoggiato nel mezzo di ambidue gli altri vetti, sostenuti ne' loro termini dalle forze A, H, E, C. Similmente un peso eguale a cinque forze, si può sostenere con quattro vetti AI, KH, EG, CF, dividendo quest' ultimo FC in B, dove attaccare si deve il peso in maniera, che CB a BF, sia come quattro a uno, essendo poste le quattro forze ne' termini A, I, H, K de' primi due vetti, ed appoggiandosi al mezzo F del terzo EG, il quarto FC, retto in C dalla quinta potenza, e così con altri vetti possono più persone sostenere un peso più grave.

Fig. 49. Fig. 50.

PROPOSIZIONE XVII.

Spiegare varj usuali strumenti, che fanno la loro forza per mezzo di uno, o più vetti.

Tav. V. Fig. 51.

I. PRimieramente se il Martello ABC, si applica colla sua parte biforcata a spiccare il chiodo C da una tavola, fissandolo verso il punto B, si fa un vette inflesso ABC, in cui la potenza si applica in A, il sostegno, o centro del moto in B, e la resistenza da vincere è in C; onde, quanto più lungo sarà il manico AB, della distanza BC, tanto

to meglio riuſcirà l' effetto di ſvellere il detto chiodo C.

II. Secondariamente le Forbici, o Ciſoie $GHIF$ per dividere il corpo E, fanno la forza come di due vetti conneſſi nel comune ſoſtegno al nodo D, eſſendo applicata la potenza a' termini F, G d'ambi i vetti FI, GH per vincere la reſiſtenza E; onde quanto maggiore è la diſtanza FD, ovvero GD della diſtanza DE, tanto più agevolmente ſegue la diviſione, onde giova, che il corpo da dividerſi ſia più vicino al nodo D. Fig. 52.

III. Le tanaglie per ſtringere, o tener fermo il corpo L, o rimuoverlo dal ſuo ſito, mettono in opera ſimilmente il doppio vette EMN, DMB mobile intorno al nodo M, come delle forbici ſi è detto; ma quando ſi adattano a ſvellere un chiodo, e ſi ferma il conveſſo inferiore in qualche parte ſtabile N, riſulta un vette infleſſo ENL, il cui ſoſtegno N più s' avvicina alla materia da muoverſi L, che non era all' uſo primiero al nodo M, e così più facilmente ne ſegue l' effetto. Fig. 53. Fig. 54.

IV. Nelle Cicogne, (così chiamate da Ariſtotile quelle macchine, che ſono gli Altalevi adattati ad uſo di cavar l' acqua da alcuni pozzi di campagna) ſul termine più alto P di un forte palo PS, piantato verticalmente accanto al pozzo M, ſta imperniato un altro palo traverſo QBO, il quale è un vette aggravato nella parte Q dal peſo attaccatovi, e dall' altra banda O vi è anneſſa la fune o ſtanga OR, cui è attaccato il ſecchio per attingere l' acqua dal pozzo, e quantunque il peſo Q ſia di qualche incomodo alla potenza, che applicata in R, cerca di abbaſſare il ſecchio per tuf- Fig. 55.

farlo nell' acque, non è però di grande impedimento, attesa la maggior lunghezza del braccio BO a cui si applica la potenza in relazione del braccio BQ, da cui pende il peso: ma al contrario ne riceve detta potenza non piccolo sollievo, quando alza il secchio essendo ajutata ad alzarlo dal medesimo peso Q, il quale ha il momento di scendere.

Fig. 56. V. Nelle trombe da alzar l'acqua, si alza lo stantufo S per mezzo del vette inflesso XVT, appoggiato in Z, ovvero del solo XZT mobile intorno al sostegno Z, onde quanto sarà il punto X, dove si applica la potenza, più lontano dal sostegno, ovvero quanto sarà maggiore XZ del braccio ZT da cui pende lo stantufo, tanto più agevolmente si farà l' agitazione dello strumento, e l' attrazione dell' acqua.

VI. Volendo alzare il gran sasso CDE colla manuella AC, mobile sull' appoggio B, v' interviene l' azione di due vetti: uno è la suddetta manuella, l' altro è la lunghezza del sasso dall' estremo C, ove appoggia sopra la prima leva, fino all' estremo E, dove sta sul terreno, e tirando dal centro di gravità D, del sasso la perpendicolare DF all' orizzonte, sarà il peso del sasso alla forza posta in A, in ragione composta di AB, a BC, e di CE ad EF; imperocchè facendo come AB a BC, così FE, ad H; si osservi, che nel vette CE, la forza del peso D, sta a quella, che lo solleva in C, come CE ad EF, ma la forza, che solleva esso peso in C sta alla potenza posta in A come AB a BC, cioè come EF ad H, dunque per l' ugualità ordinata, il peso sta alla potenza posta in A, come CE ad H,

Fig. 57.

la

la qual ragione è composta di CE ad EF, e di EF ad H; l' ultima delle quali è la medesima, che di AB a BC.

PROPOSIZIONE XVIII.

Spiegare la forza dell' asse nella ruota.

CHiamasi asse nella ruota il cilindro AB annesso ad una ruota, o timpano EDF di maggiore diametro, o di altro equivalente ordigno, cui applicandosi la potenza muove il peso C, mediante la fune, che si ravvolge al detto cilindro. E' manifesto, che nello stesso tempo in cui il peso è tirato per tanto spazio quanto importa la lunghezza della fune che circonda una volta il cilindro, bisogna, che la potenza muova tutta la ruota, o girando con essa finchè ritorni al suo posto, ovvero stando fissa essa forza finchè passi per le sue mani tutto il contorno della ruota, sicchè la velocità della potenza, sarà a quella del peso, come la circonferenza della ruota, alla circonferenza della grossezza del cilindro, la qual ragione è la medesima, che quella del raggio della ruota, al semidiametro del cilindro, onde stando la potenza al peso reciprocamente come il semidiametro del cilindro al raggio della ruota, si farà l' equilibrio sostentando il peso C, e qualunque piccolo vantaggio acquistando essa forza in se stessa, o ponendosi in distanza alquanto maggiore dal centro della ruota, per esempio applicandosi alle caviglie FV, SE, fisse nel giro di essa ruota, potrà comodamente smuovere il detto peso, derivando una periferia alquanto maggiore.

Fig. 58.

Ma

Fig. 59 Ma per meglio concepire l' azione di questo strumento, si rappresenti la ruota col cerchio *BEF*, ed il cilindro col cerchio concentrico *DHK*, e tirati per lo centro comune *O* i semidiametri *HOE*, *BOD*, si farà manifesto essere questi alcuni vetti, il cui sostegno *O*, ed il peso da muoversi attaccato all' estremo *H* del primo vette, applicandosi la potenza *P* all'estremo *E*; ovvero nel secondo vette applicandosi il peso in *D*, e la potenza all'altro termine *B*, dal che agevolmente si concepisce, essere questo strumento nn vette perpetuo, che sempre va rinnovandosi nella continuazione del moto, oppure essere un aggregato d'infiniti vetti, de' quali abbassandosi uno, succed sempre nel suo luogo un'altro a fare il medesimo ufizio, fino a tanto che la potenza dura a muovere questo strumento.

Si avverta però: primieramente che in questo moto non si sopraponga la fune sopra le spire di essa fune, applicate al cilindro nell' anteriore rivoluzione, perchè crescerebbe la grossezza di esso cilindro; onde la potenza proverebbe minor momento, movendo il cilindro più ingrossato, avendo minor proporzione il raggio della ruota al semidiametro del cilindro ingrossato di quella, che aveva il cilindro nudo.

Secondariamente si avverta, che la direzione della potenza *P* sia la retta *EP* ovvero *BN* tangente di essa ruota, perchè così la sua distanza del centro del moto *O* sarà l'intiero raggio *OB*, ma se tirasse essa ruota per un altra direzione *BG* inclinata al raggio, la sua distanza sarebbe solamente la perpendicolare *OM* tirata dal centro sopra di essa direzione. L'Ar-

L'Argano è un cilindro perpendicolare all'orizzonte, il quale si muove per alcune stanghe *F D*, *G E* in esso fisse, e con ciò si fa muovere il peso *C* per una fune, che si ravvolge intorno ad esso cilindro, e però la potenza al peso sarebbe nell'equilibrio, quando stesse come il semidiametro del cilindro alla lunghezza di queste stanghe, cui si applica la potenza, e con alquanto vantaggio di tal lunghezza di stanghe, può la potenza muovere detto peso. Se poi esso cilindro *AB* è posto orizzontalmente, ed in esso in vece d'alcuna ruota vi siano fisse le caviglie *DE*, *FG*, questo chiamasi Bulghero, con cui si alzano i pesi per le fabbriche, o si attigne l'acqua da' pozzi, alzando la secchia *C*.

Tav. VI. Fig. 60.

Fig. 61.

La Macchina, che serve a varare i Navicelli dal fosso di Livorno in Arno, e vicendevolmente da questo in quello, come si vede fuori della Porta a Mare di Pisa, da' Latini detta *Geranium*, è una gran ruota, dentro di cui gli uomini stessi camminano calcando in *D*, ed *F*, i gradini interiori come se tentassero di salire per quella concava circonferenza, il che fa girare il cilindro *AB*, a cui avvolta la fune applicata al Navicello *C* viene con ciò questo rialzato, e trasportato da un alveo, all'altro. Però la distanza di queste forze moventi dal centro del moto non è l'intero raggio della ruota, ma solamente la perpendicolare, che dal centro di essa, può tirarsi sopra la direzione del moto che fanno gli uomini nel salire; vi è però un altro vantaggio dal piano inclinato, per cui si tira detto Navicello, il qual piano diminuisce il momento di esso peso come vedrassi al suo luogo.

Fig. 62.

All'Asse nella ruota si possono riferire ancora quei

Fig. 63.

quei cilindri AB, che si fanno girare con uno, o con due manichi ripiegati ad angolo retto, quali sono ECB, AFG, a' quali applicandosi la potenza, descrive un gran giro, mentre il peso D, ovvero O attaccato alla fune rivolta al cilindro, descrive salendo, o discendendo solamente tanto spazio quanto importa la fune, che si avvolge ad esso cilindro.

Fig. 64. Il Succhiello DCE similmente si riferisce a questo genere di macchina, perchè la potenza applicata al manico DE, descrive un gran cerchio nel mentre che la punta C descrive un piccolo forame, insinuandosi a vincere la resistenza delle parti del legno, che si devono separare, e quanto il diametro DE del cerchio descritto dalla potenza è maggiore della grossezza della punta C, tanto viceversa maggiore può essere la resistenza della forza con cui contrasta. In questo strumento però vi è ancora un altro vantaggio per la forza della vite in cui è contesta la punta C, e ancora, perchè partecipa del Cuneo coll'acutezza del filo, che suol avere la punta quando è bene aguzza. Il che quanto renda agevole l'effetto si dimostrerà a suo luogo.

PROPOSIZIONE XIX.

Spiegare la composizione di più assi e ruote combinate nella medesima macchina.

Tav. VII. Fig. 65. TAlvolta per muovere un peso, non serve un solo asse colla sua ruota, ma bisogna unirne insieme molti connessi per mezzo di varj rocchetti, o ruote dentate, che danno la dovuta direzio-

ne,

ne, ed il moto opportuno a qualunque di essi secondo i bisogni. Sia per ragione d'esempio la seguente macchina *CDFH* composta di quattro assi colle sue ruote dentate, in cui se il manico *AB*, suppongasi dieci volte maggiore del semidiametro della rotella *C*, sarà la potenza in *A* applicata dieci volte più veloce di qualsivoglia dente di essa rotella. Sia poi la ruota grande *D* in un altro asse, che abbia dieci volte più denti della rotella *C*, avendo il semidiametro dieci volte maggiore; dunque bisogna, che la rotella *C* giri dieci volte, urtando con i suoi denti in quegli della ruota *D*, prima che questa faccia un intiera rivoluzione, nel qual tempo gira ancora una rotella *E* fissa nel medesimo asse con *D*; onde la rotella *C* sarà dieci volte più veloce di questa rotella *E*, a cui applicandosi un'altra gran ruota *F* maggiore di giro di essa rotella *E*, si proverà, che detta rotella *E* averà un moto dieci volte più veloce d'una simile rotella *G* fissa nel medesimo asse colla ruota F, e similmente urtando la ruota *G* in un'altra maggior ruota *H*, che abbia dieci volte più denti di essa, doverà fare dieci rivoluzioni, prima che la ruota *H* giri una volta col suo asse, in cui posto un cannello *K* grosso quanto la rotella *G* intorno a cui giri la fune, per cui si sollevi il peso *L*, sarà pure il moto della ruota *G* dieci volte più veloce del moto con cui si sollevi il peso *L*. Perchè dunque la potenza *A* è dieci volte più veloce della rotella *C*, sarà la velocità di *A* a quella di *C* come 10000. a 1000. e questa velocità *C* essendo dieci volte maggiore della velocità della rotella *E*, starà quella a questa come 1000, a 100. similmente per essere la ve-

lo-

locità di *E* decupla di quella rotella *G*, ſtarà ad eſſa come 100. a 10. e finalmente la velocità di *G* ſtarà alla velocità della fune *K*, o del peſo *L* come 10. ad 1. dunque per l' egualità ordinata, la velocità della potenza in *A* a quella del peſo *L* ſarà come 10000. ad 1. onde con queſto ſtrumento quella potenza, che da ſe potrebbe elevare una ſola libbra, ne leverebbe 10000. e ſe vi foſſero altri aſſi di più diſpoſti colla medeſima proporzione, potrebbe alzare tante libbre di peſo, quanto indicherebbe la medeſima unità con aggiunti tanti zeri appreſſo, quanti fuſſero detti aſſi, perchè decuplandoſi la velocità con qualunque aſſe, biſognerebbe aggiungere di mano in mano all' unità tanti zeri, quanti fuſſero i detti aſſi, moltiplicandoſi dieci volte maggiormente qualunque numero coll' aggiunta di un zero; onde ſi fa conto, che con ſoli 50. aſſi, la forza di una formica per ſe abile a portare un grano di arena, potrebbe muovere tutto l' univerſo Mondo, quando fin alle ſtelle ripieno fuſſe d' arena; imperciocchè ſi moſtra da Archimede, che il numero non è maggiore di quello, che eſprimerebbe una ſola unità con appreſſo cinquanta zeri, e però ſi gloriava Archimede, che ſe aveſſe potuto mettere un piede fuori del Mondo, l' avrebbe trasferito da un luogo a un altro.

„ *Dic ubi conſiſtam, & cælum terramque movebo.*

Si può oſſervare un ſimile eſempio, nella macchina, che ſi uſa a far elevare continuamente l' acqua del pozzo *K* per via di una catena di caſſette *M*, le quali verſano l' acqua per la caſſa *HI*, nella vaſca *L*, adattandoſi un cavallo, o un uomo a girare la ſtanga orizzontale *AB*, con che ſi rivol-

Fig. 66.

ta

ta il rocchetto *C*, e questo urtando ne' denti della ruota *D*, fa girare il rocchetto *E*, da cui è mossa un' altra ruota *F* col cannoncello, o rocchetto *G* intorno a cui sono applicate le cassette d' acqua *M*. Se sarà la lunghezza *AB* braccia cinque, ed il semidiametro del rocchetto *C* d'un mezzo braccio, e però la potenza *B* dieci volte più veloce di tal rocchetto *C*, il quale debba girare quattro volte prima di urtare in tutti i denti della ruota *D*, che fa girare il rocchetto *E* eguale a *C*, e questo rocchetto *E* debba girare tre volte, prima che muova tutta la ruota *F* col cannoncello, o rocchetto *G*, sarà la velocità di *B* alla velocità dell' acqua sollevata intorno al cannoncello, o rocchetto *G* in ragione composta di 10 ad 1, di 4 ad 1, e di 3 ad 1. il che importa una ragione di 120. ad 1. perchè 10. via 4. fa 40. e 40. via 3. fa 120.

Talvolta non abbiamo bisogno di gran forze per muovere un peso, ma fa di mestieri di muovere un mobile con gran velocità, come accade nelle macchine de' mulini girate dall' acqua, o dal vento: per esempio la ruota *I* già equilibrata sopra i suoi perni, e sostenuta bastevolmente dalla robustezza di essi, per macinare il grano, deve muoversi in giro sopra al suo asse con gran velocità, onde vi si adatta una macchina, con cui il vento urtando in ruote grandi, ne fa muovere altre più piccole, di manierachè si comunica maggior velocità al peso da muoversi, che alla potenza: sia il mulino a vento *ABH*, e l'ale *C* girando per la forza del vento fanno girare l' asse *AB*, colla ruota *E*, la quale con i suoi denti piglia il rocchetto *F*, e fa girare l' asse *FG* colla ruota *G*, che urtando nell'

Tavola VIII. Fig. 67.

altro

altro rocchetto H fa girare la ruota I, ed è la velocità del vento in C, alla velocità de' denti della ruota E, come il semidiametro CD al raggio della ruota, che sia per esempio in ragion tripla, perchè poi nel girare una volta la ruota E, fa girare più volte il rocchetto F, secondo la proporzione che ha il numero de' denti in E, al numero delle scannellature del rocchetto F, (e sia per esempio quadrupla) ed altrettante volte gira la ruota G, che si suppone eguale ad E, sarà la velocità della ruota E, a quella della ruota G, in proporzione di 1. a 4. ma in qualunque rivoluzione della ruota G, doverà più volte girare il rocchetto H (e sia per esempio cinque volte) e con esso la macina I, sarà la velocità G, a quella della macina I, come 1. a 5. onde la velocità del vento a quella della macina, è composta delle ragioni di 3. 1. di 1. 4. e di 1. 5. cioè in tutto sarà come 3. a 20. e reciprocamente la forza del vento, presa assolutamente, sta alla resistenza, che ha in tal sito la macina a muoversi, come 20. 3.

Fig. 68. Ancora negli ordigni, che adoprano le donne per filar lana, o bambagie, e nella ruota adoprata de' funari per far le corde, o nelle mole adattate ad aguzzare i coltelli, ed in quelle, che servono a lavorare, o pulir le gemme, per lo più la potenza si adatta in maniera, che possa muovere, non già qualche gran peso, ma quel soggetto leggierissimo della lana, cotone &c. posto nel centro della rotella H in I con grandissima velocità, perchè le loro minime fibre attorcigliandosi insieme, si premono vicendevolmente con gran momento; e perciò si compone insieme la ruota AE colla minore H, amendue cir-

con-

condate da una fune, che ricorre in se stessa, perchè in una sola rivoluzione della maggiore, gira la minore tante volte, quante il diametro della minore entra nella maggiore. E nella stessa maniera se la rotella H è una mola, nel girare velocemente, preme con gran forza il coltello, o la gemma calcatavi sopra, rendendo quello, o più acuto nel suo filo, e questa più spianata, o pulita nelle sue faccette, come facilmente s'intende applicandovi le già dette dottrine, senza che facci mestieri di più allungarmi sopra di ciò.

PROPOSIZIONE XX.

Spiegare la forza delle Taglie, o Carrucole in qualsivoglia modo disposte.

I. PRimieramente essendo fissa una carrucola B, per cui passando la fune venga alzato un peso A dalla potenza P, niun vantaggio di forza per ciò acquista la potenza, ma solo con essa carrucola ha maggior facilità, perchè se la mano P dovesse immediatamente alzare il peso A, lo inalzerebbe col peso delle proprie braccia, laddove mediante la carrucola B si muove la mano all'ingiù, onde viene ajutata dal peso delle sue braccia nell'alzare il medesimo peso A più comodamente, ma però con una forza eguale a detto peso, essendo il centro della carrucola B in distanza eguale dall'uno, e l'altro braccio della corda, e però il centro del moto non è in diversa lontananza dalla direzione del peso, e da quella della potenza. Fig. 69.

II. In secondo luogo se si adopererà una taglia mobile, verrà a raddoppiarsi la forza della potenza; Fig. 70.

onde potrà sollevare un peso doppio di se medesima; imperciocchè stando la Taglia *B* mobile attaccata al peso *A*, e retta la fune in *F*, vicino all'immobile taglia *C*, se la potenza si applichi in *C* a sollevare la fune, o si applichi in *H* a tirarla in giù mediante la taglia fissa in *C*, sempre è manifesto, che volendo ascenda il peso *A* per l' altezza, che è da *D* in *E*, bisogna che ambidue i tratti *DE*, *GI* passino per mano della potenza, ovvero, che stando in essa attaccata al medesimo punto della fune, si muova per un tratto eguale ad amendue le lunghezze *ED*, *GI*, e però la velocità della potenza essendo dupla di quella del peso *A*, potrà vicendevolmente esso peso essere duplo della potenza *P*, il che ancora si può ricavare, osservando, che la taglia mobile *B* è come un vette *ID*, il cui sostegno è nell' estremo *D*, ed il peso dipende dal mezzo *B*, e la potenza inalza l'altro estremo *I*, e però sta al peso reciprocamente come *ID* a *BI*, che è ragione soddupla.

Fig. 71. III. Se ancora l'estremo della fune *F* fosse raccomandato alla medesima Taglia mobile, per cui di nuovo passa la stessa fune, si triplicherà la forza della potenza, perchè ascendendo il peso da *F* in *I*, conviene, che la forza si muova triplicatamente, acciò restino sviluppati dalle Taglie i tre tratti di corda *FI*, *EH*, *GK*, onde la velocità della potenza è tripla di quella del peso, e però può reggere un peso triplo di se.

Tav. IX. Fig. 72. IV. Similmente essendo applicata la fune col termine *F* alla taglia fissa *C*, indi passando per la taglia mobile *B*, e circondando la taglia fissa *C*, indi passando per un altra taglia mobile *D*, e poi avan-

avanzandosi all' altra immobile *E*, potrà con esse la potenza *P* sollevare un peso quadruplo della sua forza; perchè dovendo alzarsi il peso *A* per uno spazio eguale a *IF*, converrà, che la potenza *P* tiri a se gli quattro tratti di corda eguali *FI*, *KL*, *MN*, *OQ*, onde avendo quadrupla velocità di quella del peso, può sollevare un peso quadruplo della sua forza.

V. Nella stessa maniera si prova, che essendo il termine della fune applicato in *G*, ad una delle taglie mobili *D*, e passando per la fissa *C*, indi circondando la mobile *D*, poi passando per l' immobile *E*, indi per l'altra mobile *B*, ed attraversando la terza immobile *F*, potrà la potenza *P* alzare un peso quintuplo di se stessa, perchè avrà una velocità cinque volte maggiore di quella del peso: essendo che sollevandosi questo da *G* in *N*, conviene, che passino per le mani della potenza quei cinque tratti di fune *GN*, *MH*, *IO*, *RK*, *LQ*. E con tale artifizio moltiplicando le taglie, si potrà muovere qualunque peso maggiore della potenza in ragione di qualunque numero pari paragonato all'unità, se il termine della fune è fisso in un sito immobile ed in ragione di qualunque numero dispari all'unità, se è attaccata la fune ad una Taglia mobile. Fig. 73.

VI. Questa moltiplicità di carrucole può essere congiunta per un medesimo asse, quando siano ruote eguali; ma essendo conficcate in una cassa con diversi assi, doverebbero essere di diametro disuguale, acciò i tratti della fune non venghino ad implicarsi uno con l' altro, e stiano però paralleli come è necessario nella ragione addotta del momento delle potenze con quello del peso. Fig. 74.

Fig. 75. VII. Essendo le funi con altrettanti corpi distinti, quante sono le Taglie mobili B, D, I raccomandate a' punti fissi H, E, G, crescerà il momento della potenza F in ragione tanto multiplicata della dupla, quanto è il numero di esse Taglie, come quì essendo tre Taglie, sarà il suo momento divenuto ottuplo, che è ragione triplicata della dupla, perchè se fosse applicata in D, averebbe a muovere il peso A con dupla velocità, e duplo momento; essendo in I, sarebbe la sua velocità di nuovo dupla di quella che averebbe in D, cioè quadrupla della velocità del peso A, ed essendo in F, l'ha dupla altresì di quella che averebbe in I, è però ottupla di quella del peso, e così di mano in mano.

Fig. 76. VIII. Se le funi, che abbracciano qualche Ta-'a non sono sensibilmente parallele, come finora : supposto, ma prolungate le rette CE, PD venissero ad un angolo in L, dovrebbe la dire-ie del peso A passare pel medesimo angolo L, e si è dimostrato di sopra, e da qualunque pun- della direzione del peso A, tirando le paral-.. BE, DB ad esse funi, sarà la potenza P al peso A, come LD ad LB, cioè come il seno dell' angolo DBL, che è la metà di EBD, o dell' opposto DLE, fatto dal concorso delle funi, al seno dell' angolo BDL, o del suo complemento BDP.

Fig. 77. IX. E se più Taglie mobili B, C, D applicate a diverse funi fisse in G, F, E faranno alzare il peso A dalla potenza P, sarà sempre la potenza al peso, in ragione composta di quella de' seni della metà di ciascun angolo SVT compreso dalle funi prolungate a' seni de' medesimi angoli interi, come apparisce dal detto di sopra.

X. Si

X. Si suol comporre ancora questo strumento coll'argano, o con più assi combinati insieme, come appare in questa disposizione, ed è facile il calcolare la forza, componendo insieme le ragioni che risultano da ciascun particolare strumento, secondo le ragioni date di sopra. Fig. 78.

PROPOSIZIONE XXI.

Esporre la forza della vite.

NEl piano fisso *DE* sieno scavate alcune spire, che si chiamano madrevite, e dentro di esse sia inserita la vite maschia *BG*, al termine di cui sia attaccato il peso *A*, ed una potenza applicata al termine *C* del manico *BC*, girando esso raggio *BC* farà una circonferenza circolare, e dal piano *DE* si vedrà sorgere una sola voluta della vite, ed il peso sarà salito solamente tanto, quanto è l'intervallo da una spira all'altra, dunque sarà tanto più veloce il moto della potenza di quello del peso, quanto maggiore è la Periferia del raggio *BC* della distanza, che corre tra un giro e l'altro di essa vite; onde nella stessa proporzione potrà la potenza muovere un peso maggiore di quello, che solleverebbe da se stessa senza altro strumento: dal che è chiaro quanto immensamente cresca il momento della potenza per mezzo della vite, e di quanta efficacia sia questa macchina da adoprarsi in molti riscontri. Tav. X. Fig. 79.

Viceversa, può talora essere il peso da sollevarsi applicato al piano *DE*, il quale si farà innalzare similmente per mezzo della vite, ed in tal maniera sottoposte molte viti si può innalzare un gran Fig. 80.

peso, anzi sollevare un edifizio già fatto; come Geremia Lersoni fece alzare il Campanile della Chiesa di S. Lorenzo di Rotterdam molti palmi sopra terra, affinchè sotto vi si rifacessi poi i fondamenti, sopra de' quali fu posato diritto, e sano.

Fig. 81. Ma il più comune, ed ordinario uso delle viti è per stringere, o premere, o calcare qualche cosa, come nelle morse de' Fabbri, ne' torchi degli Stampatori, e de' Librai, e ne' torchi con cui si fa scolare il vino dalle grappe già prima calcate, e l'olio dall' olive si vede apparire, e allora la resistenza di ciò, che si deve premere, fa l' ufizio del peso, mentre la potenza applicata al manico, che fa girare la vite cerca di vincere tale resistenza, accostando insieme quanto sia possibile le parti di ciò, che si deve stringere, e comprimersi vicendevolmente.

Fig. 82. Frequentemente si suol comporre questo strumento coll' asse nella ruota, ed allora si nomina, la Coclea infinita, o Vite perpetua d' Archimede, la di cui forza s' intende agevolmente, paragonando il moto della potenza applicata al manico *IL* della Coclea *FG*, col moto del peso pendente dal cilindro *ED* mosso colla rotazione della ruota *B* in esso inserita, la quale si va movendo secondo che i denti di essa sono rivoltati dalle spire di detta vite. Nel tempo che la potenza fa uno de' suoi giri col raggio *IL*, la Coclea *FG* rivoltandosi prende un sol dente della ruota *B*, onde avanti che tutta la ruota abbia una volta girato, e che il peso *A* sia alzato tanto spazio quanta è la fune che abbraccia la grossezza del cilindro *ED*, bisogna, che la potenza giri tante volte il manico *IL*, quanti so-

no

no i denti di essa ruota B, sicchè tanto più veloce sarà la potenza del peso, quanto è maggiore il raggio IL, moltiplicato per il numero dei denti della ruota B, del solo semidiametro del cilindro ED preso una volta, e però nella stessa ragione cresce il momento della potenza.

PROPOSIZIONE XXII.

Spiegare la forza del Cuneo.

CHiamasi Cuneo un prisma triangolare FBG, che col suo filo insinuandosi nel corpo IH ne separa le parti. Si rappresenti la forza in cui dette parti resistono alla divisione per la retta R, e sia la potenza M una mazza, o martello da applicarsi al Cuneo, la quale stia ad R, come la metà della grossezza del Cuneo AG sta alla sua altezza AB, dico, che la potenza M equivalerà alla detta resistenza, onde con ogni piccolo vantaggio, che abbia di velocità nel battere la faccia superiore del Cuneo, l'insinuerà fra le parti del corpo da spaccarsi, e vincerà la resistenza, che hanno le porzioni IH alla separazione; imperocchè movendosi il Cuneo contro il corpo IH secondo la direzione della sua altezza AB per qualunque minimo spazio CB, sarà necessario, che le dette parti IH cedano ciascuna, ritirandosi per lo spazio CD, o CE, dunque la velocità della potenza, che spinge il Cuneo e l'accompagna, sta alla velocità con cui si muove la resistenza, come BC a CD, o come AB a AG, cioè per costruzione come la resistenza R alla potenza M, e però si equilibreranno, e col vantaggio poi di qual-

Tav. XI. Fig. 83. 84.

che maggiore velocità, con cui si urti il Cuneo, percuotendo gagliardamente la faccia superiore FGQ prevalerà la potenza alla resistenza, onde il Cuneo si avanzerà dentro il corpo.

Quando poi vi è entrato, per cacciarlo più oltre ricercasi minor forza, essendo quindi in poi la velocità della potenza a quella con cui si separano le parti I, H, come l'altezza CB alla perpendicolare CT, condotta sul lato del Cuneo, o come BA ad AP, o come BG a GA, ed essendo AP minore di AG. è dunque maggior ragione quella di BA ad AP, dell'altra che era prima di AB ad AG. Imperocchè le parti I, H nello staccarsi muovonsi come d'intorno al centro B per gli archi ES, DO perpendicolari a' raggi BE, BD, e poi essendo le perpendicolari CT, CV parallele alle tangenti di essi archi, si deve misurare lo spazio corso dalle porzioni I, H colle direzioni CT, CV, e non più colle prime CE, CD.

Fig. 85.

Quindi con tal forza segue poi a spaccarsi il corpo IH con una fessura, la quale scorre oltre la punta B del Cuneo, arrivando per esempio fino in L, il che apporta un nuovo vantaggio, potendosi allora considerare i due vetti inflessi ELN, DLN congiunti nel medesimo braccio LN, mentre alle braccia distinte LE, LD si applica ne' loro estremi E, D la forza mediante il Cuneo; onde più facilmente si promuove l'apertura, crescendo le braccia EL, DL cui si applica col Cuneo la potenza, e scemando viceversa il braccio LN, in cui rimane la resistenza di esso vette inflesso; onde molto maggiore si fa il momento della forza, e facilmente si staccano affatto le dette parti I, H.

Fig. 86.

Quin-

Quindi si può raccorre, che tanto più facile sia la divisione d' un corpo in parità d' altre circostanze, quanto più acuto è l' angolo del Cuneo che vi si adopera, perchè essendo su la stessa base *FG* due Cunei *FBG* più acuto, ed *FRG* meno acuto, per essere l' angolo *FRG* maggiore dell' altro *FBG*, sarà l'altezza *AB* maggiore di *AR*, onde la proporzione di *AB* ad *AG* sarà maggiore, che di *AR* alla stessa *AG*; ma come l' altezza del Cuneo alla metà della sua base, così sta la resistenza alla potenza nella prima introduzione del Cuneo, come s' è veduto di sopra, dunque è maggiore la proporzione della resistenza alla potenza col Cuneo più acuto, di quello sia col Cuneo di minor acutezza; onde una potenza minore basterà col Cuneo più acuto a far quello, che farebbe una maggior potenza col Cuneo men acuto; ed ancora tirate dal punto *A* le perpendicolari *AP*, *AS* sopra i lati *BG*, *RG*, sarà maggiore la ragione di *BA* ad *AP*, che di *RA* ad *AS*, essendo la prima eguale alla ragione di *BG* a *GA*, la seconda eguale a quella di *RG* alla stessa *GA*, essendo *RG* minore di *BG*; onde ancora nel proseguimento, ha la resistenza minor ragione alla potenza col Cuneo più acuto, il quale può essere adoperato da forza minore, e fare il medesimo effetto.

Fig. 87.

Si riducono al Cuneo tutti gli strumenti, che si adoperano per fendere, e tagliare varie materie, cioè i coltelli, le scuri, le asce, le piane, i rasoi, &c. e talvolta per farli più acuti si suole affilarli colla punta alquanto curva, come mostra il profilo *FBG* composto di due curve *BG*, *BF* toccate dalla retta intermedia *BA* loro tangente, il quale

Fig. 88.

an-

angolo FBG è minore di qualsivoglia angolo acuto rettilineo (per la. 16. del 3. degli Elem.) e però la punta FBG, ovvero il filo del rasoio BD, è più atto ad insinuarsi per radere il pelo, come bisogna, e così ancora le ugne di molti animali si vedono dalla natura composte con varie curve AB, FB, GB, le quali riescono molto pronte a penetrare i corpi degli altri animali, che vogliono essi attrappare.

Fig. 89.

PROPOSIZIONE XXIII.

Spiegare la ragione de' piani inclinati.

Fig. 90.

Simile al cuneo è il piano inclinato GB, elevato dall'orizzonte AB per l'angolo ABG, e siccome cacciando il taglio B d'una bietta, o cuneo GAB sotto il corpo E, posato nel pavimento BD, accanto al muro DH, si farebbe facilmente ascendere esso peso E sopra il piano BG, separandolo dal pavimento, cui stava congiunto colla propria pressione, e ciò più agevolmente si otterrebbe, quando fosse l'angolo ABG più acuto, così stando fermo il piano inclinato GB con maggiore facilità si farebbe salire sopra di esso il medesimo peso E, secondo che il detto angolo ABG sarà minore. Si cerca dunque, in qual proporzione cresca il momento della forza, per muovere un dato peso sopra de' piani diversamente inclinati.

Fig. 91.

Sia il grave KM rotondo, che stia per cadere secondo l'inclinato piano AB, ma sia trattenuto da una forza L, che lo tiri per la direzione KP direttamente contraria alla KF con cui scenderebbe

be, cioè parallela al piano AB: congiunta al contatto dal centro del corpo la retta KM, e condotta KD perpendicolare all' orizzonte, che è la direzione per cui la gravità dovrebbe per se stessa far discendere il corpo, si conduca MR parallela ad essa KD; onde riuscirà il parallelogrammo $KRMQ$; dunque la forza L, la quale ritira il corpo per la direzione KR sta alla gravità del peso, che lo spinge per la direzione KQ, come RK a KQ, ed alla pressione del corpo sopra il piano AB, ovvero alla resistenza di questo piano, che sostiene esso corpo, saranno le potenze L K a detta pressione, come i lati RK, KQ al semidiametro KM stando in equilibrio queste tre forze. Ed essendo RK eguale ad MQ, ed il triangolo MKQ simile al triangolo QBD, ed all'intero ABC, dunque la gravità assoluta del corpo K alla sua gravità relativa, che eserciterebbe nel piano per KF, che si eguaglia alla forza L, da cui è ritirata per la direzione contraria, stando come KQ a QM, starà come AB ad AC, essendo questi lati proporzionali a quelli; ed alla pressione, che fa sopra il piano, ovvero alla resistenza di esso piano, che eguaglia detta pressione, sta la medesima gravità assoluta come AB a BC, e però il momento di esso grave per il piano inclinato sta al momento totale, con cui scenderebbe nel perpendicolo, come reciprocamente la perpendicolare AC alla lunghezza AB di esso piano inclinato, ed il momento con cui esso corpo K si aggrava sopra il piano AB, al momento con cui esso corpo premerebbe un piano orizzontale; opposto alla sua perpendicolare caduta, è come la detta base BC alla medesima lunghezza del piano AB. Il che &c. Co-

COROLLARI.

Fig. 92. I. Se il corpo *A* è collocato in varj piani *BE,BD*, che abbino la medesima altezza *BI*, il momento nel piano *BE* al momento nel piano *BD*, sarà reciprocamente come *BD* a *BE*, perchè il primo momento a quello che avrebbe nel perpendicolo, sta come *BI* a *BE*, ed il momento nel perpendicolo, al momento nel secondo piano *BD*, sta come *BD* a *BI*; dunque per l'egualità perturbata il momento nel primo piano *BE* a quello nel secondo piano *BD* stà come *BD* a *BE*.

Fig 93. II. Se in ambidue i piani *BE*, *BD* egualmente alti, si porranno due pesi *C* ed *A* proporzionali alle lunghezze di essi piani, averanno tutti due eguale momento in essi, di maniera che connettendosi con una funicella *AFC*, che passa per la carrucola *F*, staranno in equilibrio; imperocchè pongasi un grave *H* eguale all'altro *A* nel piano *BE*, essendo *C*, ed *H* nel medesimo piano, il momento di *C* a quello di *H* sta come *C* ad *H*, cioè come *C* ad *A*, oppure come *BE* a *BD*, ma ancora il momento di *A* nel piano *DB* a quello del peso eguale *H* nel piano *BE*, sta come *BE* a *BD*; dunque il momento di *C* nel piano *BE*, eguaglia quello di *A* nel piano *BD*.

Fig. 94. III. Se i piani *CE*, *CD* sono eguali in lunghezza, condotte perpendicolari *DG*, *EH* sopra l'orizzonte, sarà il momento di un peso *F* nel piano *CD*, al momento d'un egual peso *A* nel piano *EC*, come l'altezza *DG* all'altezza *EH*; perocchè il momento di *F* nel suo piano *DC*, al momento suo, o del peso eguale *A* nel perpendicolo, sta come *GD* a *DC*,

a DC, ed il momento di A nel perpendicolo ſta al momento del medeſimo peſo A nel piano EC, come EC, ovvero CD che gli è eguale, al perpendicolo EH, dunque il momento di F per CD al momento di A per EC, ſta come DG ad EH per l' equalità ordinata.

IV. Data qualunque minima potenza P, e qualſivoglia gran peſo A, ſi potrà da eſſo ſollevare queſto per mezzo di qualche piano, imperocchè ſe ſi fa un triangolo BDI di cui la lunghezza BD ſia alla perpendicolare altezza BI nella ſteſſa ragione, che ha il peſo A alla potenze P, è manifeſto poterſi ſoſtenere eſſo peſo nel detto piano con tale potenza P; onde ſe alquanto più s' inclinerà il piano BD, di manierachè la ſua lunghezza, alla ſua altezza ſia in ragione alquanto maggiore di A a P, prevarrà la potenza P al peſo A, e potrà ſollevarlo per eſſo piano colla direzione AP parallela al medeſimo.

Fig. 95.

CAPITOLO VI.

Del Moto accelerato, e ritardato.

PROPOSIZIONE XXIV.

Se un mobile ſarà ſpinto da una forza continuamente applicata, la quale operi ſempre nella ſteſſa maniera, creſcerà la di lui velocità nella ſteſſa proporzione, in cui creſce il tempo del moto.

Chia-

Chiamasi questa sorte di movimento, moto uniformemente accelerato.

Fig. 96. SI rappresenti l'estensione del tempo colla retta AP, divisa in parti eguali quantosivoglia piccole AB, BC, CD &c. se la forza applicata al mobile nella prima particella di tempo AB, gli avrà impresso un tal piccolo grado di velocità rappresentato dall' ordinata BG, è manifesto, che se la detta forza quindi in poi cessasse di spingere il mobile, esso seguirebbe a muoversi equabilmente il resto del tempo colla velocità ricevuta, quando non gli fosse diminuita, o affatto estinta da causa veruna (per la supposiz. 3.); ma durando la forza motrice a spingere il mobile, bisognerà, che nella seguente particella di tempo BC, oltre la velocità CM, eguale a BG, mantenutasi nel mobile, gli s' imprima un altro grado di velocità MH, eguale al primo BG, e però nel fine del tempo AC doppio di AB, avrà il mobile la velocità CH doppia della prima BG. Similmente se cessasse la forza motrice dopo il tempo AC di spingere il mobile, seguirebbe a muoversi equabilmente con essa velocità CH, ma seguitando essa forza a premerlo come prima, nel fine della terza particella di tempo CD alla velocità DN, mantenuta eguale a CH, gli si aggiungerà l' altro grado di velocità NI, eguale al primo BG; onde nel fine del tempo AD, triplo di AB, averà il mobile la velocità DI tripla della prima BG, e così di mano in mano seguitando la forza a spingere il mobile uniformemente, gli accrescerà la velocità nella stessa proporzione, in cui si aumenta il tempo

po del moto, dimanierachè quante volte sarà moltiplice il tempo AP della prima particola AB, altrettanto sarà moltiplice la velocità PZ, acquistata nel fine del tempo AP, della prima velocità BG, acquistata nel minimo tempo AB. Il che &c.

COROLLARI.

I. I corpi gravi discendono con moto uniformemente accelerato nella suddetta maniera, supponendosi spinti da una forza di gravità costante, la quale sebbene si crede da molti non mantenersi eguale in qualunque distanza dal centro della terra, anzi variarsi in ragione reciproca de' quadrati delle distanze, tuttavolta essendo la superficie del globo terrestre distante dal suo centro per più di 360. miglia, quando si considera la discesa di un grave per l'altezza di 100. braccia, o ancora d'un miglio, non diventa sensibilmente minore la distanza del mobile da esso centro, e però non deve considerarsi la forza della gravità fatta disuguale, ma deve attendersi come forza costante; ed esponendo il tempo del moto per qualsivoglia retta AP, applicando ad essa un triangolo APZ, le velocità acquistate in varie parti de' tempi AD, AF, AP saranno come le ordinate DI, FL, PZ di esso triangolo.

II. Quando fossero due forze G, F applicate a diversi mobili (come accade ne' gravi eguali, cadenti per varj piani inclinati, in cui avendo momenti diversi, spinti sono con diversa forza) le quali uniformemente gli spingono per i tempi AB, DS, le velocità BC, SU impresse nel fine di detti

Fig. 97.

ti tempi, faranno in ragione compofta di quella delle forze, e di quella de' tempi, perchè fatti i triangoli ABC, DSV, e prefa DE eguale ad AB, ed ordinata EH, farà la velocità BC alla EH, come la forza G alla forza F, perchè effendo gli effetti proporzionali alle loro cagioni, effe velocità rifultanti da tali forze in tempi eguali AB, DE faranno proporzionali a dette forze, ma la velocità HE alla SV, è poi come il tempo DE, ovvero AB al tempo DS, dunque la ragione della velocità CB alla velocità VS, effendo compofta di CB ad HE, e di HE ad VS, farà compofta della ragione delle forze, e di quella de' tempi.

III. Se però le forze faranno reciproche de' tempi, cioè G ad F, come il tempo DI al tempo AB, le velocità CB, IK quindi provenienti, faranno eguali, perchè CB ad HE, ftando come G ad F, cioè come DI ad AB, ovvero a DE eguale ad AB, fta come IK ad HE, e però CB eguaglia IK.

PROPOSIZIONE XXV.

Fig. 98. *Rapprefentandofi i tempi di due moti dalle rette* AT, IH, *cui fiano applicate da una banda le rette* AF, EF, TF, *e le rette* IG, MG, HG *efprimenti le forze, che in tali tempi fpingono il mobile, quando ancora foffero varie, e dall'altra banda le rette* BV, EV, TV, *e le rette* RC, MC, HC *rapprefentanti le velocità in que' tempi acquiftate da effo mobile (le quali figure* AFFT, IGGH *fi diranno piani delle forze, e le altre due* AVVT ICCH *piani delle velocità) farà la velocità* TV *al-*

alla velocità HC, *come il piano delle forze* AF, FT *al piano delle forze* IG, GH.

DIvidansi essi tempi in egual numero di parti infinitamente piccole, come *AB*, *BD*, *DE*, nella prima figura, ed *IR*, *RL*, *LM* nella seconda, ed applicatevi le rette in ambi i piani, si tirino dagli estremi delle velocità le rette *VN*, *VQ* parallele ad *AT*, e le rette *CP*, *CQ* parallele ad *IH*, essendo le velocità (per il Coroll. 2. della Prop. 24.) in ragione composta delle forze, e de' tempi, sarà *BV* ad *RC*, come il rettangolo *FAB* al rettangolo *GIR*, e parimente *NV* a *PC*, come il rettangolo *FBD* al rettangolo *GRL*, e similmente *OV* a *QC*, come il rettangolo *FDE* al rettangolo *GLM*, e così sempre; dunque la velocità *TV*, che è la somma di tutti gli antecedenti *BV*, *NV*, *OV*, e di quante differenze sono interrotte tra le velocità, che vanno accrescendo fino a *TV*, starà alla velocità *HC*, somma de' conseguenti *RC*, *PC*, *QC*, e di tutte l' altre differenze di velocità interposte fino alle velocità *HC*, come il piano delle forze *AFFT*, che è l' aggregato de' rettangoli antecedenti *FAB*, *FBD*, *FDE*, e di tutti gli altri inscritti, o circoscritti ad esso piano, al piano delle forze *IGGH*, che è l' aggregato de' conseguenti rettangoli *GIR*, *GRL*, *GLM*, e di tutti gli altri, che si inscriverebbero, o circoscriverebbero a detta figura, essendo ancora le prime *BV*, *NV*, *OV* proporzionali alle terze grandezze *FAB*, *FBD*, *FDE*, siccome ancora le seconde *RC*, *PC*. *QC* proporzionali alle quarte *GIR*, *GRL*, *GLM*, Il che &c.

PROPOSIZIONE XXVI.

Gli spazj TS, HL *fatti ne' tempi* AT, IH, *sono proporzionali a' piani delle loro velocità* AVT, ICH.

Fig. 99.

Divisi gli spazj in egual numero di parti infinitamente piccole *SO*, *OQ*, e *LK*, *KP*, e determinandosi i tempi *ET*, *DE*, in cui sono scorsi que' spazj, *SO*, *QO*, ed i tempi *HM*, *MR*, corrispondenti agli spazj *KL*, *KP*, questi spazj essendo in ragion composta de' tempi, e delle velocità, sarà *SO* ad *LK*, come il rettangolo *ETV* al rettangolo *MHC*, e così ancora *QO* a *PK*, come i rettangoli *DEV*, *RMC*, ed essendo eguali *OS*, *QO*, saranno eguali i rettangoli *ETV*, *DEV*, come ancora l'egualità di *LK*, *PK* ci mostra eguali i rettangoli *MHC*, *RMC*; dunque egualmente moltiplicati gli antecedenti, e gli conseguenti, starà tutto lo spazio *TS* allo spazio *HL*, come il piano delle velocità *AVT* all'altro *ICH*. Il che &c.

COROLLARI.

I. Quindi se con l'ultimo grado della velocità *TV* nello stesso tempo *AT*, si farà lo spazio *G*, sarà *TS*, a *G*, come *AVT* al rettangolo circoscritto *ATVM*, le cui ordinate *DM*, *EN* eguali a *TV*, fanno il piano delle velocità costante esercitata nel moto equabile.

II. Ne' moti de' gravi cadenti appresso la superficie terrestre, essendo il piano delle velocità un triangolo, di cui è doppio il rettangolo circoscritto, sarà lo spazio di moto equabile, colla veloci-

tà

tà acquiſtata nel fine del tempo, fatto in tempo eguale, doppio dello ſpazio ſcorſo nella caduta.

Fig. 100

III. Gli ſpazj fatti col moto accelerato da un grave cadente, ſaranno come i quadrati de' tempi ſcorſi, perchè lo ſpazio fatto nel tempo *AD*, allo ſpazio fatto nel tempo *AT*, è come il triangolo *ADV* al triangolo *ATV*, che ſono i piani delle velocità acquiſtate dal mobile in detti tempi cadente: onde eſſendo tali triangoli come i quadrati de' lati omologhi *AD*, *AT*, dunque gli ſpazj fatti in detti tempi, ſono come i quadrati de' tempi medeſimi.

IV. Onde diviſo il tempo della caduta in quante ſi voglia eguali particelle, ſe nella prima il mobile diſcende un braccio, nel fine della ſeconda avrà ſcorſe quattro braccia, nel fine della terza braccia nove, nel fine della quarta braccia ſedici ec. così di mano in mano di maniera, che nelle parti eguali di tempo creſcono gli ſpazj ſecondo la ſerie de' numeri diſpari, perchè nel primo tempo avendo fatto uno ſpazio, nel ſecondo ne fa tre altri, nel terzo ne aggiunge cinque, nel quarto ſette, e così oltre va proſeguendo.

PROPOSIZIONE XXVII.

Fig. 101.

Se da i mobili AB *col moto accelerato, ſi fanno dalla quiete gli ſpazj* ACBC *ambidue perpendicolari, o ambidue nel medeſimo piano inclinato, poſta* CD *media proporzionale fra gli due ſpazj ſcorſi; ſarà il tempo dello ſpazio* AC *a quello dello ſpa-*

 zio

zio BC, *come* AC *alla media* CD, *o come questa media all' estrema* BC.

IMperciocchè lo spazio *AC* allo spazio *BC* è come il quadrato del tempo impiegato nel primo, al quadrato del tempo impiegato nel secondo (per il Cor. 3. Prop. 26.) ma essendo *CD* media proporzionale fra le due *AC*, *BC*, starà *AC* a *BC*, come il quadrato *AC*, a quello della media *CD*, o come questo quadrato *CD* al quadrato dell' estrema *BC*; dunque i quadrati di *AC*, e di *CD*, ovvero di *CD*, e di *BC* sono come i quadrati de' tempi impiegati in detti spazj, e però i tempi sono come le dette linee *AC*, e *CD*, ovvero *CD* e *BC*. Il che &c.

COROLLARIO.

Ancora le velocità acquistate nel fine di tali spazj *AC*, *BC*, essendo proporzionali a i tempi (per la Prop. 24.) saranno come la prima *AC*, alla media *CD*, o come questa all' estrema *BC*.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Fig. 102. *Cominciando nello stesso istante due mobili da due punti diversi* A, B *a cadere per lo stesso perpendicolo, o per lo stesso piano inclinato verso l' Orizzonte* CG, *in cui seguitassero a muoversi colla velocità ottenuta da ciascuno nella loro caduta, converranno insieme nel punto* E, *dove l' orizzontale* CE *è doppia della* DC, *media proporzionale fra gli due spazi della loro discesa* AC, BC.

SI congiunga *DE*, e condotta l' orizzontale *B F*, tirisi *FG* parallela ad *AC*. Siccome *CE* è doppia

pia della DC, così BF, ovvero CG sarà doppia della BD, e conseguentemente GE doppia di BC; perchè adunque il tempo della caduta del mobile B per BC può esprimersi per la stessa BC, sarà la media DC il tempo della caduta di AC: e perchè il mobile B colla sua velocità acquistata in C, scorrerebbe equabilmente nell'orizzonte la parte GE, doppia di BC, nello stesso tempo BC della sua caduta (per il Coroll. 2. della Prop. 26.) dunque nel tempo BD, scorrerebbe equabilmente lo spazio CG doppio di BD, onde nel moto equabile di tutta la CE, impiegherà il tempo DC, ovvero avendo impiegato nella caduta BC il tempo BC, e nello spazio orizzontale CG il tempo DB, nello stesso tempo DC, in cui cade il mobile A per la retta AC, il mobile B avrà fatto gli spazi BC, e CG, ed essendo CE a GE, come DC a BC, cioè come la velocità acquistata dal mobile A, a quella acquistata dal mobile B (per il Cor. della preced.) dunque nello stesso tempo BC, in cui il mobile B proseguirà lo spazio da G in E, ancora il mobile A si moverà equabilmente colla propria velocità da C in E (pet il Coroll. della Prop. 2.) pertanto nel detto punto E gli due mobili giungeranno insieme. Il che &c.

COROLLARI.

I. Nel cerchio BHC tirato il diametro verticale BC, e la tangente del vertice BA, indi condotta una retta AI parallela al diametro BC, e da' punti H, I, in cui sega l'arco, ordinate le rette HDF, IEG, che saranno eguali al doppio di AB, perchè il diametro le taglia per mezzo, e sono

Fig. 103.

le parti *HD*, *IE*, eguali ad *AB*, dico che il mobile *A* cadendo per *AH*, e colla sua velocità acquistata proseguendo equabilmente il moto per *HF*, ovvero cadendo da *A* in *I*, e colla velocità ivi conceputa movendosi equabilmente per *IG*, si faranno nello stesso tempo, tanto gli due spazj *AH*, *HF*, quanto gli due *AI*, *IG*, essendo le dette orizzontali doppie di *AB*, la quale è la media proporzionale tra gli due spazj *AH*, *AI*, per essere il quadrato della tangente *AB* eguale al rettangolo *HAI*.

II. Posta la *CE* doppia dello spazio fatto per la caduta *BC*: se il mobile *B* colla velocità acquistata per lo spazio *BC*, si moverà equabilmente per *CE*, si faranno questi due moti in tempo minore di quali si vogliano altri moti, fatti da un' altro mobile *A* per la caduta *AC* maggiore, o minore della *BC*, insieme col moto equabile per la stessa *CE* colla velocità acquistata nella caduta *AC* per la stessa linea *BC*, o perpendicolare, o inclinata all' orizzonte; imperocchè presa la media proporzionale *DC* fra le due cadute *AC*, *BC*, essendo *DC* il tempo della caduta *BC* ed *AC*, quello della discesa *AC*, sarà pure *DC* il tempo del moto equabile, che deve farsi dal mobile *B*, per *CE* dupla di *CB*, dunque il tempo per le due rette *BC*, *CE* sarà duplo di essa *DC*, ma il tempo del mobile *A* per *CE*, a quello del mobile *B* per lo stesso spazio *CE*, essendo reciproco delle loro velocità (per il Coroll. 2. della Prop. 3.) le quali sono proporzionali alle rette *DC*, *BC*, sarà dunque il tempo del moto di *A* per *CE*, al tempo di *B* per la stessa *CE*, come *BC* a *DC*, dunque il tempo per *AC*, e per *CE* sarà espresso dalla somma delle due *AC*,

Fig. 101.

e *BC*,

e *BC*, le quali sono sempre maggiori del doppio della media *CD* (per la Prop. 25. del 5. degli Elem.) dunque sarà più lungo il tempo per *AC*, e per *CE*, che per *BC*, e *CE*, onde questo è il minimo di qualunque altro.

PROPOSIZIONE XXIX.

Benchè suppongasi dal Galileo, e dal Torricelli, che il mobile caduto su l'orizzonte, possa muoversi in esso colla velocità acquistata nel fine della caduta: ciò non deve ordinariamente succedere, ma il mobile, o si rifletterà dal piano, o si fermerà in esso, cadendovi per la perpendicolare A B, *oppure discendendo per un piano inclinato* A C, *vi proseguirà equabilmente il moto con una velocità minore di quella ottenuta nel fine della discesa, a cui starà in proporzione della* B C *alla* C A. Fig. 104.

IMperocchè cadendo perpendicolarmente una palla nel piano orizzontale, o si ribalza all'insù se vi ha qualche forza elastica, o si ferma nel piano della caduta, che colla sua resistenza totalmente si oppone alla velocità, con cui viene impresso, e perchè detta perpendicolare facendo angolo retto con qualsivoglia linea condotta dal punto *B* sopra al piano orizzontale, non vi ha ragione alcuna, per cui il mobile debba seguitare a muoversi più tosto per una parte, che per l'altra, essendo a tutte indifferente la sua direzione. Ma cadendo il mobile per un piano inclinato *AC*, e tirata la perpendicolare *AB* sopra l'orizzonte, compiuto il parallelogrammo *ABCD*, si vede che il moto *AC* è composto della velocità *AB* opposta al piano o-

rizzontale, e dell'altra *BC*, ovvero *AD* parallela all' orizzonte, onde con questa sola dovrà il mobile proseguire il viaggio equabilmente per la *CE*, rimanendo l'altra velocità *AB* elisa dalla resistenza del piano, sopra di cui il mobile è sostenuto; dunque la velocità, con cui può moversi il mobile per l' orizzonte, non è tutta quella, che si è acquistata nel fine del moto accelerato per il piano *AC*, ma è minore di essa, stando alla medesima come il seno *BC* dell' angolo *CAB* al seno totale *AC*, che corrisponde all'angolo retto.

COROLLARI.

Fig. 105. I. Discendendo due diversi mobili *A*, *B* da diversi punti nel medesimo piano, posta nell' orizzonte la *CE* doppia di *CH* intercetta fra il punto *C*, e la perpendicolare *DH* condotta dal punto *D*, termine della *CD*, media proporzionale fra gli due spazi *AC*, *BC*, converranno essi mobili *A*, *B*, dopo la loro caduta, proseguendo il moto sopra l' orizzonte, nel punto *E*; imperocchè siccome gli tempi delle discese *AC*, *BC* sono come *DC* a *BC*, ancora le velocità ivi acquistate sono nella stessa ragione; ma condotta sull' orizzonte la perpendicolare *BG*, il mobile *B* in vece della velocità *BC*, impiegherà la velocità *CG* nel suo moto equabile, ed il mobile *A* in vece della *DC* impiegherà la velocità *CH*; dunque siccome il mobile *B* nel tempo *DC*, farebbe colla velocità *CB* il doppio di essa *CD*, così nel medesimo tempo colla velocità *GC* doverà fare la *CE* doppia di *CH*, per essere le velocità *BC*, e *GC* proporzionali agli spazi *DC*, e *CH*. Similmente il mobile *A*, sicco-

come nel tempo *BC* faceva colla propria velocità *DC* il doppio di essa *CD*, così colla velocità *CH* farà il doppio di *CH*, che è la stessa *CE*, dunque tanto la discesa *BC* col moto *CE* si fa ne' due tempi *BC*, *CD*, quanto la discesa *AC* col moto *CE* si fa ne' due tempi *CD*, e *BC*; dunque se tutti due i mobili nello stesso istante hanno principiato il loro moto da *B*, e da *A*, giungeranno nel medesimo tempo al punto *E*, dove insieme concorreranno.

II. Posta l' orizzontale *CE* doppia della *CG*, il viaggio della caduta *BC* coll'orizzontale *CE*, si farà in minor tempo, che qualunque altra caduta *AC* maggiore, o minore, con lo stesso moto nell' orizzontale *CE*. Imperocchè se il tempo per *AC* è *AC*, ed il tempo per *BC* è la media *DC*, questo stesso servirebbe a fare colla velocità *DC* nell'orizzonte, il duplo di *BC*; onde ancora colla velocità *CG* nello stesso tempo si farà la *CE* doppia di *CG*; dunque il tempo del viaggio per *BCE* sarà il duplo *CD*; ma se il mobile *B* spende il tempo *DC* nel fare l'orizzonte *CE* colla velocità *CG*, il mobile *A* spenderà il tempo *BC* nel fare la stessa orizzontale colla velocità *CH*, dovendo essere i tempi reciprochi delle velocità, ed essendo *DC* a *BC* come *CH* a *CG*, dunque il tempo del viaggio *ACE*, sarà la somma di *AC*, e di *BC*, che è maggiore del duplo della *CD*, e però si spenderà più tempo per *AC*, e per *CE*, che per *BC*, e *CE*. Fig. 106.

III. Ancora passando il mobile *A* da un piano inclinato *AC*, in un altro inclinato *CE*, non vi passerà coll' istessa velocità *AC* guadagnatasi nella cadu- Fig. 107.

duta, ma colla sola parte *BC*, che è alla *AC*, come il seno dell'angolo *CAB*, contenuto dal primo piano, e dal perpendicolo *AB*, tirato sopra il secondo piano, al seno totale corrispondente all' angolo retto; e se dovesse passare in un altro piano *Ce*, il quale fa un angolo più acuto col primo *AC*, passerebbe il mobile *A* sopra di esso con velocità alquanto maggiore, perchè tirata l'altra perpendicolare *Ab* sopra quest'altro piano, il seno *Cb* è maggiore del seno *CB*: onde quanto più acuto è l' angolo *ACB*, più si accosta la velocità, con cui deve passare nel secondo piano il mobile, alla velocità da esso acquistata per la caduta *AC*.

Fig. 108. IV. Onde facendosi l'angolo *ACB*, ovvero *DCG* infinitamente piccolo, cioè minore di qualunque angolo acuto rettilineo, come è quello fatto dalla tangente *AC* con una curva *BCG*, e questa pure essendo toccata dall'orizzontale *FE* per l'angolo infinitamente piccolo *FGB*, potrà il mobile ripassare dalla retta *AC* nella curva *CG* colla stessa velocità acquistata in *C*, e quindi da essa curva prolungherà il moto per l' orizzontale *FE* colla velocità conceputa nel fine delle discese *AC*, *CG* come era supposto dagli antichi Geometri.

PROPOSIZIONE XXX.

Tavola XIII. Fig. 109. *Il tempo della caduta nel perpendicolo* AB *sta al tempo per l' inclinato piano egualmente alto* AD, *come* AB *ad* AD.

SUpponghasi, che nello stesso tempo in cui si fa l'inclinato piano *AD* si facesse nel perpendicolo la lunghezza *AC*: starà dunque *AC* alla *AD*,

co-

come la velocità conceputa in C alla velocità conceputa in D, perchè con tali velocità farebbe nello ſteſſo tempo il duplo di AC, ed il duplo AD con moto equabile; ma la velocità in C alla velocità in D acquiſtate nello ſteſſo tempo, quella dalla gravità nel perpendicolo, queſta dalla gravità nel piano inclinato, ſtarebbe come la prima forza alla ſeconda, cioè come AD ad AB, però ſe il tempo per AB ſia eſpreſſo dalla medeſima AB, ſarà il tempo per AC eſpreſſo dalla AD media proporzionale fra le due AB, AC; ma il tempo per AC ſi ſuppone lo ſteſſo, che il tempo per AD; dunque la medeſima AD eſpone il tempo per AD, e però i tempi per la perpendicolare AB, e per l'inclinato piano AD egualmente alto, ſtanno come la lunghezza del perpendicolo alla lunghezza del piano.

Corollari.

I. Se ſaranno due piani AE, AD diverſamente inclinati all'orizzonte, di eguale altezza, ſaranno i tempi per la caduta di eſſi proporzionali a' medeſimi piani, perchè il tempo per AD eſſendo a quello per AB, come la ſteſſa AD alla AB, e queſto tempo per AB eſſendo al tempo per AE, come AB ad AE; dunque per l'egual proporzione il tempo per AD a quello per AE ſta come AD ad AE. Fig. 109.

II. Perchè tutto il tempo per AD ſtà a tutto quello per AE, come AD ad AE, e tirata la GF orizzontale, ſtarebbe ancora come AF ad AG, o come il tempo per AF al tempo per AG, ancora il tempo per la reſidua FD dopo la caduta AF, ſtarà al tempo della reſidua GE dopo la caduta Fig. 109.

AG

AG nella ſteſſa proporzione di AD ad AE, ovvero di FD a GE.

Fig. 110. III. Avendo ſuppoſto il tempo per AD, nella coſtruzione, eguale al tempo per la perpendicolare AC, congiunta DC ſarà il triangolo CAD ſimile all' altro BAD, avendo intorno allo ſteſſo angolo A, i lati CA, AD ed AD, AB proporzionali; però l'angolo ADC ſarà eguale al retto ABD, ed il ſemicircolo deſcritto ſopra il diametro AC dovrà paſſare pel punto D; onde i tempi per tutte le corde inſcritte nel ſemicircolo dal punto ſublime A come AD, AE ſono eguali al tempo per lo diametro AC, eſſendo ancora AC ad AE come AE alla ſua perpendicolare AF, ed ancora le corde CE, CD ſi paſſerebbero in egual tempo, perchè compiuti i rettangoli $ADCH$, $AECG$, le rette CE, CD ſaranno eguali all' oppoſte GA, AH, ed egualmente inclinate, e però in egual tempo con eſſe dovrebbero ſcorrerſi.

IV. Gli gradi di velocità acquiſtati dalla ſteſſa altezza in D, e in B ſono eguali, perchè eſſendo gli ſpazi AD, AB proporzionali a' tempi, con cui ſono ſcorſi acceleratamente, e con cui potrebbero paſſarſi equabilmente i doppj di eſſi con le ultime velocità, biſogna che tali velocità ſiano eguali,

Fig 111. V. Se dall' iſteſſo parete verticale DF s' inclinano varj piani allo ſteſſo punto A del pavimento orizzontale AF, quello per cui poſſa un grave ſcorrere in minor tempo d' altro, ſarà il piano BA inclinato ad angoli ſemiretti col muro, e col pavimento, perchè tirata l'orizzontale BC, e la verticale AC, ſaranno queſte eguali, facendo l'angolo ſemiretto, l' una, e l' altra col piano BA; dun-

dunque il cerchio descritto col raggio *CA* passa per *B*, ove sarà toccato dal muro, onde inclinato qualunque altro piano *AD* segherà la circonferenza in *E*, e però il tempo per *DA* essendo maggiore di quello per la corda *EA*, il qual tempo è il medesimo colla corda *BA*, ne segue, che il piano *BA* si scorre in minor tempo di qualunque altro.

VI. Ma essendo un punto *A* fuori del piano *DF* inclinato all'orizzonte, condotta in esso la perpendicolare *AF*, e la verticale *AD*, se si dividerà l'angolo *FAD* per mezzo colla retta *AB*, sarà il tempo per *AB*, o per *BA*, più breve del tempo per qualsivoglia altro inclinato del medesimo punto *A*, allo stesso piano *FD*, perchè tirata *BC* parallela ad *AF*, e però perpendicolare anch'essa al piano *FD*, sarà l'angolo *CAB* eguale all'angolo *CBA*, che pareggia l'alterno *BAF*; onde il cerchio descritto col centro *C* per *A*, passerà per *B*, ed ivi toccherà il piano *DF*; onde qualunque altro piano condotto dal punto *A* sopra *FD* dovrà passarsi in maggior tempo che il piano *AB*, perchè segherà l'arco, e sarà maggiore della corda intercetta da esso semicircolo. Fig. 112.

PROPOSIZIONE XXXI.

Se la forza F *muove nel tempo* CD, *il mobile* B, *e in egual tempo* HL *il mobile* A, *con moto accelerato, la velocità* DG *impressa al primo, alla velocità* LM *impressa nel secondo, starà reciprocamente come la quantità di materia, che è nel mobile* A *a quella, che è raccolta nel mobile* B. Fig. 113.

Im-

IMperocchè in qualunque minima particella eguale di tempo CE, HI la ſteſſa forza operando con tutta la ſua energía, dovrà produrre un effetto eguale, onde riſulterà un eguale momento in ambidue i detti mobili, e però dovrà eſſere il grado iniziale di velocità ER impreſſo nel mobile B, al grado iniziale di velocità IK impoſto nel mobile A, come reciprocamente la quantità di materia, che è in A a quella di B, perchè così i momenti ſaranno eguali; eſſendo dunque i gradi primi, ed elementari delle velocità ER, IK reciprochi alle quantità di materia de' mobili A, B, è manifeſto, che ancora i loro egualmente moltiplici DG, LM impreſſi ne' mobili medeſimi ſul fine de' tempi eguali CD, HL ſaranno reciprochi alle maſſe de' mobili A, B, cioè alle quantità delle loro materie. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se due forze F, N proporzionali alle maſſe de' mobili B, A, nel fine di eguali tempi CD, HL gli averanno impreſſe le velocità DP, LM, queſte ſaranno eguali; imperocchè ſe la forza N ſpinto aveſſe nel tempo CD il mobile B, gli averebbe impreſſa la velocità DG, che ſarebbe all'altra DP, come la forza N alla forza F, cioè come la maſſa di A a quella di B, ma ſecondo queſta propoſizione, eſſendo moſſi dalla ſteſſa forza N i mobili B, A, ne' tempi eguali CD, HL, le velocità loro impreſſe DG, LM ſono nella reciproca proporzione della maſſa di A a quella di B, cioè come DG a DP; dunque LM, DP ſono velocità eguali.

II. Eſ-

II. Eſſendo dunque le forze della gravità in varj mobili proporzionali alle loro maſſe, cioè alle quantità di materia contenute in eſſe, come un pezzo di pietra maggiore, ed uno minore della ſteſſa ſpecie, o ancora due corpi di ſpecie diverſa, uno di ferro, e uno di marmo, avendo la gravità proporzionale alle quantità di materia in eſſi contenute, dovranno in qualunque iſtante della ſua diſceſa ricevere eguali gradi di velocità; onde in egual tempo caderebbero dalla ſteſſa altezza nel voto, ed anche ſi vede, che ogni ſorte di corpo cade per l' aria quaſi colla ſteſſa velocità, ſe non in quanto vi ſi oſſerva qualche piccolo divario per la maggior reſiſtenza, che in queſto mezzo incontrano i corpi più leggieri, sì per aver maggiore ſuperficie de' più gravi a proporzione del loro peſo, e sì ancora, perchè i più leggieri perdono maggior parte della ſua gravità, che i più gravi, come per eſempio ſe un corpo ha un peſo cento volte maggiore di quello dell' aria, in pari mole ſi diminuiſce la ſua gravità dentro l'aria per un centeſimo, e ſe un corpo più leggiero foſſe ſolamente dieci volte più peſante dell'aria in pari mole, ſi diminuiſce la ſua gravità per una decima parte, la quale però è maggiore della centeſima perduta dall' altro corpo più grave.

III. La velocità, che acquiſta un corpo in un dato tempo diſcendendo per qualche fluido, alla velocità, che nel medeſimo tempo ſi ſarebbe da eſſo acquiſtata, o da qualunque altro mobile nel voto, ſarà come il ſuo peſo comparativo (cioè l' ecceſſo del proprio peſo, ſopra quello del fluido in pari mole) al ſuo peſo aſſoluto; imperocchè

chè se il mobile avesse solamente tanto peso, quanto in egual mole ha il fluido, si equilibrerebbe con esso in qualunque sito senza discendere, onde se il mobile discende per esso fluido vi è spinto solamente dal peso comparativo, cioè da quello che ha di più del fluido in pari mole, ma nel voto sarebbe spinto in giù da tutto il suo peso assoluto, e però le velocità in egual tempo acquistate nel fluido, e nel voto dallo stesso mobile sono proporzionali a tali forze, cioè come il peso comparativo al peso assoluto.

IV. essendo la velocità in un dato tempo acquistata dal mobile cadente in un fluido a quella, che nello stesso tempo avrebbe conceputa nel voto, come il peso comparativo al suo peso assoluto, e questa velocità acquistata nel voto a quella, che nel medesimo tempo cadendo per un altro fluido si acquisterebbe, come lo stesso peso assoluto a quest' altro peso comparativo, ne segue, che le velocità acquistate in diversi fluidi nel medesimo tempo sono proporzionali a' pesi comparativi di esso mobile paragonato a tali fluidi: per esempio pesando un mobile grani 1200. eguali in mole ad un aria pesante un grano solo, ed all' acqua, che pesi mille grani, sarà il peso comparativo del mobile nell' aria grani 1199. ed il peso comparativo dell' aria grani 200. onde la velocità acquistata in uno stesso tempo dal mobile nell' aria, e nell' acqua sarà in ragione di 1199. a 200.

V. Le velocità poi acquistate da due diversi mobili, in diversi fluidi nel medesimo tempo saranno in ragione composta della diretta de' loro pesi comparativi, e della reciproca de' loro pesi assoluti;

per-

perchè la velocità del primo mobile nel primo fluido alla velocità, che acquisterebbe nel medesimo tempo nel voto, è come il suo peso comparativo al suo peso assoluto, e la velocità eguale, che acquisterebbe il secondo mobile nel voto, a quella che acquisterà nello stesso tempo dentro il secondo fluido, sarà come il peso assoluto del secondo mobile al suo peso comparativo, dunque la velocità acquistata dal primo mobile nel primo fluido, a quella acquistata dal secondo mobile nell' altro fluido, è in ragione composta del peso comparativo del primo mobile al suo peso assoluto, e dell' altro peso assoluto del secondo mobile al di lui peso comparativo, cioè come il prodotto del peso comparativo del primo e dell' assoluto del secondo, al prodotto del peso comparativo del secondo mobile nel peso assoluto del primo, il che importa la ragione composta della diretta de' pesi comparativi, e della reciproca degli assoluti.

PROPOSIZIONE XXXII.

Fig. 114.

Allo spazio AH *del moto accelerato siano ordinate le rette* AF, SG, HP *rappresentanti le forze che in tali punti spingono il mobile, e dall' altra banda siano ordinate le rette* SC, HV *rappresentanti le velocità acquistate in quelle discese* AS, AH: (*si dirà lo spazio* AFPH *la scala delle forze, e lo spazio* ACVH *la scala delle velocità*) *tirate le rette* CE, VI *perpendicolari alla curva* ACV *saranno le rette subnormali* SE, HI, *cioè le intercette nell' asse fra qualunque ordinata*

ta, e la perpendicolare alla curva, proporzionali alle forze corrispondenti SG, HP.

SI piglino le parti dell'asse *BS*, *DH* scorse in eguali particelle di tempo infinitamante piccolo, e si ordinino le *BN*, *DM* alla detta scala delle velocità, le quali saranno infinitamente prossime alle ordinate *SC*, *HU*, sicchè i punti *N*, *M* della curva saranno come a ridosso alle tangenti de' punti *C*, *V*, e tirate le parallele all'asse *NQ*, *MR*, le particelle delle ordinate *QC*, *RV* mostreranno gli augumenti momentanei di velocità, che acquista il mobile in dette eguali particelle di tempo, e però saranno come le forze corrispondenti *SG*, *HP*. Ma essendo *QC* a *QN*, come *ES* ad *SC*, per la similitudine de' triangoli *NQC*, *CSE*, e lo spazio *QN* essendo ad *MR*, come *BS* a *DH* fatti in tempi eguali, e però come le velocità *SC*, *HV*, e finalmente essendo *MR* ed *RV*, come *HV* ad *HI*, dunque per l'egualità ordinata, sarà *QC* ad *RV*, come *SE* ad *HI*, e però essendo la prima alla seconda, come la forza *GS* alla forza *PH*, starà ancora la terza alla quarta nella stessa ragione delle forze, come dovea dimostrarsi.

COROLLARI.

Fig. 114. I. Dunque per rappresentare le forze, si possono applicare allo spazio *ASH* in ciascuno de' punti *SH* le rette *SG*, *HP*, eguali respettivamente alle subnormali *SE*, *HI*, che loro corrispondono nella scala delle velocità *ACVH*.

II. Gli spazj della scala delle forze *AFGS*, *AFPH*, sono come i quadrati delle velocità corrispon-

rispondenti *SC*, *HV*, essendo stato dimostrato nel Coroll 6. Prop. 1. della seconda Appendice delle nostre quadrature, che lo spazio *FASG* composto delle subnormali, eguaglia la metà del quadrato dell'ordinata *SC*, siccome lo spazio *AFPH* eguaglia la metà del quadrato dell'ordinata corrispondente *HV*.

Fig. 115.

III. Nel moto accelerato della gravità costante, essendo gli spazj come i quadrati delle velocità, e però la scala delle velocità *ACVH* essendo una parabola, in cui le abscisse *AS*, *AH* sono come i quadrati delle ordinate *SC*, *HV*, le subnormali *SE*, *HI* sono sempre eguali alla metà del lato retto, e però la scala delle forze è un parallelogrammo *AFPH*, essendo da per tutto esse forze eguali.

Fig. 116.

IV. Se le forze *AF*, *SG*, *HP* fossero proporzionali alle distanze *AT*, *ST*, *HT* dal centro, o dal termine del moto *T*, come da alcuni Autori si crede essere la gravità, sarà la scala delle forze *AFT* un triangolo, e la scala delle velocità un quarto di cerchio *ACXT*, perchè essendo il raggio *TC* perpendicolare alla circonferenza, la stessa *TS* è subnormale, e similmente essendo il raggio *TV* perpendicolare alla medesima circonferenza, la retta *TH* è subnormale, e però sono *ST*, *HT* proporzionali alle forze *SG*, *HP*.

Fig. 117.

V. E se le forze fossero in reciproca ragione delle distanze, la scala delle forze sarebbe una Iperbola d'Apollonio *FGP* fra gli Assintoti *AT*, *TZ*, per essere in essa *GS* a *PH*, come reciprocamente la distanza *HT* alla distanza *TS*, ed allora la scala delle velocità *ACV*, sarebbe una Logistica del

secondo grado in cui i quadrati delle ordinate *SC*, *HV* sono come la ragione di *AT* a *CN*, alla ragione di *AT* ad *VM*, di manierachè le velocità *SC*, *HV* sono in subduplicata ragione de' Logaritmi delle distanze *ST*, *HT*, come raccogliesi da ciò che ho detto nella proposizione 10. del mio libro degl' infiniti.

Fig. 117. VI. Ma se le forze sono reciproche de' quadrati delle distanze, come vien supposto verisimilmente da molti Filosofi e Mattematici, sarebbe la scala di esse *FGP* un' Iperbola quadratica, essendo *GS* a *PH* come il quadrato *TH* al quadrato *TS*; e la scala delle velocità sarebbe la versiera *ACVX* da me descritta nel libro delle quadrature (prop. 4.) di manierachè le velocità *SC*, *HV* saranno in ragione composta della subduplicata degli spazj scorsi direttamente *AS*, *AH*, e della subduplicata delle distanze reciproche *TH*, *TS*.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Fig. 118. *Se si farà una figura* AZLMT *reciproca della scala delle velocità* ACVT, *sarà l' area* AZMT *a qualsivoglia sua porzione* AZLH, *come il tempo impiegato nello scorrere lo spazio* AT, *al tempo impiegato nello spazio* AH *corrispondente all' altra porzione*.

IMperocchè prese due parti *HI*, *TE* dello spazio, fra di loro eguali, ma infinitamente piccole, sarà il tempo per *ET* al tempo per *IH*, come reciprocamente la velocità *HC* alla velocità *TV*; ma si suppone essere ancora *TM* ad *HL* come reciprocamente *HC* a *TV*, dunque il tempo

po per lo ſpazietto ET al tempo per l'altro IH, ſta come TM ad IL, o come il rettangolo $MTEX$ all' altro egualmente alto $LHIY$, e così ſempre; dunque il tempo per tutta la AT composto di tante particelle di tempo, quante ſono le parti eguali ad ET nello ſpazio AT, ſta al tempo per la porzione AH, che ſimilmente è l'aggregato di tutte quelle particelle di tempo, che ſi ricercano per paſſare tutte le parti eguali ad HI, come l' area $AZMT$ composta di tutti i rettangoli infinitamente piccoli $MTEX$, all' area $AZLH$ composta di tutti i rettangoli $LHIY$. Il che &c.

Corollari.

I. Se la ſcala delle velocità è una Parabola $ACVT$, come nell' Ipoteſi della gravità costante, ſarà la ſua reciproca $AZMT$ un' Iperbola quadratica, in cui il quadrato MT al quadrato LH, stia come AH ad AT, eſſendo questa la ragione del quadrato HC al quadrato TV nella Parabola: ed è l'area $AZMT$ dupla del rettangolo ATM, ſiccome l'area $AZLH$ è dupla del rettangolo AHL, come dimostrai negli Ugeniani (Cap. 8. num. 11), dunque il tempo per AT al tempo per AH, è come il rettangolo MTA al rettangolo LHA, cioè in ragione composta di MT ad LH, oppure di HC a TV, e di TA ad AH, cioè del quadrato TV al quadrato HC, le quali due ragioni fanno quella di TV ad HC, e però in tale Ipoteſi la ſcala de' tempi è la medeſima Parabola, che ſerve di ſcala alle velocità. Fig. 118.

II. Ma nell' Ipoteſi delle forze proporzionali alle distanze dal termine T, eſſendo la ſcala delle Fig. 119.

velocità un quarto di circolo *ATX*, la sua figura reciproca *TMLZA* (per il Coroll. 5. della prima appendice delle quadrature) sarà la stessa con quella figura ivi considerata nel Cor. 3. la di cui area *ATMZ* è dupla del quadrante, e qualunque porzione *AZLH* è dupla del settore corrispondente *ATV*, come ivi ho dimostrato; onde il tempo per tutta la *AT* al tempo per la parte *AH*, è come il quadrante *ATX* al settore *ATU*, cioè come l'arco *AX* all'arco *AV*, onde in questa Ipotesi gli spazj scorsi *AS*, *AH* sono i seni versi, le velocità *SC*, *HV* i seni retti, le forze come i seni del complimento *CR*, *VN* eguali alle distanze *ST*, *HT*, ed i tempi sono come gli archi circolari *AC*, *AV*.

Fig. 117. III. Ma se le forze fossero reciprocamente proporzionali alle distanze dal termine *T*, essendo allora la scala delle velocità una Logistica del secondo grado *ACVXT*, sarebbe il tempo per *AS* al tempo per *AH*, come l'area *ACNT* all'area *AVMT*, perchè la suttangente presa nell'assintoto è reciproca delle ordinate in questa curva, come ho dimostrato (nel Cap. 2. Prop. 10. degl'infiniti) onde la figura reciproca alla scala delle velocità, sarebbe correlativa ad essa, e però eguale alle porzioni sopraddette della stessa figura, come dimostro nel capo ottavo degli Ugeniani al num. 2.

Fig. 120. IV. Che se si suppongono le forze reciprocamente proporzionali a' quadrati delle distanze, essendo la scala delle velocità la versiera *ACUZ*, prese due parti eguali da ambi i termini del diametro *AS*, *TH*, ed ordinate le rette *SC*, *HV* sarà il tempo per *AT* al tempo per *AS*, come l'area

rea $ACZT$ all'area $HVZT$, tagliata dall'altra ordinata, cioè come il quadruplo del semicircolo genitore AMT, al quadruplo del segmento misto TMA, ovvero AOT, onde il tempo per AS al tempo per AH, sarà come il segmento misto AOT all'altro misto segmento AMT, oppure come la somma dell' arco AO, e del seno OS alla somma dell'arco AM, e del seno MH, il che ci dimostra, che in questa Ipotesi la scala del tempo sarà la Cicloide $AFBDT$, in cui qualunque ordinata SF uguaglia la somma dell' arco AO, e del seno OS, e qualunque altra ordinata HB è eguale all'arco AM, ed al seno HM.

PROPOSIZIONE XXXIV.

Se un mobile A *a cui sia impressa una velocità* LA, *si manda in su per una direzione* AC, *la quale, o sia perpendicolare all' Orizzonte, o sopra un piano inclinato che regga il detto mobile, ne succede il moto ritardato, di cui si verificano tutte le proprietà già dimostrate del moto accelerato, ma con ordine inverso, cioè principiando dal termine del moto.* Fig. 121.

Esprima AP l'estensione del tempo, e supponga si, che il grave A nel tempo AH, dovesse cadendo acquistarsi la velocità HK eguale all' impressa LA, e compiuto il rettangolo $AHKL$, e tirato il diametro AK, sarebbe il triangolo AHK il piano della velocità del moto accelerato nella caduta del tempo AH; dunque il mobile A spinto all'insù colla velocità LA, se non fosse grave si alzerebbe con moto equabile, col piano di velocità $AHKL$, ma essendo grave, l'azione della

gravità, che gli contrasta in tutto il tempo della salita, gl'imprime ne'tempi AG, AT le velocità GN, TX direttamente contrarie alla velocità impressavi, e però in detti tempi AT, AG in vece di ritenere tutta la velocità LA eguale alle ordinate GM, TV del rettangolo, gli rimarranno solamente gli eccessi MN, VX di quella sua velocità sopra i gradi GN, TX, che all'opposto gli vengono impressi; e finalmente nel tempo AH non gli rimarrà velocità alcuna per salire, essendo tutta ribattuta dalla velocità HK eguale alla detta LA, onde nel momento H finirà la salita del mobile, e quindi in poi comincierà a discendere, perchè la velocità PZ impressagli dalla gravità nel tempo AP, supera la velocità PQ eguale ad LA impressagli dal proiciente; onde con l'eccesso QZ si rispinge abbasso, e similmente nel tempo AR con l'eccesso ST; onde si va accelerando nel cadere per il tempo KS, eguale ad HR, secondo il piano delle velocità KST.

I. Onde primieramente è chiaro, che nella salita di questo moto ritardato il piano delle velocità è il triangolo ALK, perchè ne' tempi LM, LV eguali a' tempi AG, AT esercita le velocità MN, VX, siccome viceversa il piano delle velocità nel discendere, e l'altro triangolo KST.

II. Secondo: che lo spazio AB, a cui può salire un projetto, è la metà dello spazio AC, che farebbe con moto equabile, se non fusse grave, nel tempo della salita AH, perchè gli spazj sono come i piani delle velocità, e però come il triangolo ALK al rettangolo $ALKH$, il quale farebbe il piano del moto equabile.

III.

III. Terzo: che lo ſpazio AB a cui può ſalire il projetto, è lo ſteſſo che quello per cui cadendo naturalmente nel medeſimo tempo AH, ſi ſarebbe acquiſtata la velocità HK, eguale all'impreſſa LA, onde vicendevolmente qualunque grave cadendo per uno ſpazio BA ſi acquiſta la ſteſſa velocità, con cui ſe foſſe per la ſteſſa direzione rimeſſo in alto, ritornerebbe alla medeſima altezza nello ſteſſo tempo.

IV. Quarto: che ſiccome gli ſpazj fatti cadendo, ſono in duplicata ragione de' tempi ſcorſi dal principio del moto AG, AT, AH, viceverſa gli ſpazj che reſtano a ſcorrerſi nel ſalire, ſono in duplicata ragione de' tempi computati, dal fine del moto HA, HG, HT, mentre que' primi corriſpondono a' triangoli ANG, ATX, AHK, e queſti ultimi ſpazj del moto ritardato corriſpondono a' triangoli ALK, NMK, XVK.

V. Quinto: che gli ſpazj fatti in tempi eguali, ſiccome nella caduta ſono nella progreſſione de' numeri diſpari 1. 3. 5. 7. &c. computati dal principio del moto, così nella ſalita ſono nella ſteſſa progreſſione, computandogli dal fine di eſſa ſalita.

VI. Seſto: la ſcala delle velocità del moto ritardato è la ſteſſa Parabola $EFAH$, che ſerve pel moto accelerato, ma però principiando non dal vertice E, ma dalla baſe AH, e quindi andando verſo la cima.

VII. Settimo: la ſcala de' tempi nel moto ritardato è il trilineo Parabolico $AFEB$, quando nel moto accelerato è la medeſima Parabola AEH, eſſendo i tempi proporzionali alle velocità; Imperocchè eſſendo il quadrato AH al quadrato FO,

co-

come il triangolo ALK, al triangolo simile NMK, o come HE ad EO, sarà per conversione di ragione il triangolo ALK al trapezio $ALNM$ (che sono i piani delle velocità corrispondenti a i tempi della salita LK, LM, ovvero BE, DF) così EH ad OH, cioè lo spazio BA allo spazio AD, i quali sono fatti ne' tempi BE, DF, eguali ad LK, LM, e però $AFEB$ è la scala de' tempi.

CAPITOLO VII.

Del Moto composto dell' equabile, e dell' accelerato.

PROPOSIZIONE XXXV.

Tavola XIV. Fig. 122. 123.

Movendosi il mobile A *con moto composto dell' equabile secondo la direzione* AD, *con tale velocità, quale si sarebbe acquistata cadendo dall' altezza* SA, *e del moto accelerato secondo la direzione de' gravi* AG, *descriverà una Parabola* ACB, *le cui ordinate* FC, GB *sieno parallele alla direzione* AD, *ed il cui diametro sarà la direzione de' gravi* AG, *ed il lato retto sarà quadruplo dell' altezza* SA, *la quale si chiamerà sublimità della Parabola.*

Intendasi un cannello AG elevato perpendicolarmente all' orizzonte, il quale sia mosso equabilmente per la direzione AD colla velocità medesima, che può prodursi dalla caduta SA di un grave, e si mantenga il cannello sempre equidistante a se stesso, ma nel medesimo tempo si

lasci

lasci cadere la palla *A* dentro al cannello; Quando adunque il cannello sarà nel sito *EH*, sia discesa la palla dentro il medesimo per lo spazio *EC*, e quando giugnerà il cannello in *DB*, abbia disceso la palla tutto lo spazio *DB*, sarà dunque lo spazio *EC* allo spazio *DB* come il quadrato del tempo impiegato nel discendere col moto accelerato per l'altezza *EC*, al quadrato del tempo impiegato nello scorrere l'altezza *DB*; ma il tempo della discesa *EC* è lo stesso col tempo in cui viene trasferito equabilmente il cannello da *A* in *E*, ed il tempo della caduta *DB* è lo stesso che quello in cui è trasferito il cannello da *A* in *D*, i quali tempi sono come gli spazj del moto equabile, cioè come *AE* ad *AD*, dunque la *EC* alla *DB* è come il quadrato di *AE* al quadrato di *AD*, oppure condotte le *CF*, *BG* parallele alla direzione *AD*, sarà *AF* ad *AG* come il quadrato dell'ordinata *FC* al quadrato dell'ordinata *GB*; ma questa è la proprietà essenziale della Parabola, dunque col moto equabile del cannello composto, e col moto accellerato della gravità della palla, si descrive la curva Parabolica *ACB*, e perchè la velocità del moto equabile è eguale a quella che si acquisterebbe la palla cadendo dalla sublimità *SA*, con cui si farebbe equabilmente nello stesso tempo della caduta uno spazio doppio di *SA*: dunque posta *AF*, eguale ad *SA*, ed ordinata *FC* essendo scorsa nello stesso tempo con moto acceleretο la *AF*, e con moto equabile la *FC* con quella stessa velocità che si è acquistata la palla nella caduta *AF*, riuscirà la ordinata *FC* dupla di *AF*, ma il lato retto della Parabola sta all'ordinata *FC*, come la me-

medesima FC alla AF, essendo il quadrato di FC eguale al rettangolo di AF nel lato retto; dunque esso lato retto è duplo di FC, e conseguentemente quadruplo di AF. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se dunque con la mano, o con la Balestra, o con altri strumenti, quali sono l'Archibuso, il Mortaro, il Cannone, viene gettata una pietra, una palla, una saetta, e qualunque altro projetto, la via che descrive il mobile separato che sia dallo strumento, il quale per la direzione AD lo incammina, sarà la curva Parabolica ACB, prescindendo dalla resistenza dell'aria, mercecchè l'impeto impresso al mobile per la direzione AD lo porterebbe equabilmente di sua natura per la retta AD, ma intanto la gravità indirizzandolo con moto accelerato verso il centro de' gravi, lo distorna dalla direzione AD, e l'obbliga a trasportarsi con moto composto per la curva ACB sopra descritta.

II. Lo stesso dicesi dell'acqua, o altri liquori, che escono da' vasi per un tubo, il cui foro non sia parallelo all'orizzonte, ma perpendicolare, o inclinato ad esso secondo la direzione di esso tubo, come nelle fontane si osserva, nelle quali movendosi l'acqua con moto composto dell'equabile, secondo la direzione del tubo per cui esce, colla velocità impressali dalla pressione del liquore che vi sta sopra, e del moto accelerato dalla propria gravità, sempre descrive una Parabola, la cui sublimità è l'altezza dell'acqua racchiusa nel suo conservatorio, da cui essendo caduta l'acqua, si è acquistata la velocità laterale, con cui esce dal cannello.

III.

III. La direzione per cui è mandato un projetto, sarà sempre tangente della curva Parabolica da esso descritta, essendo parallela alle ordinate di essa.

IV. Generalmente in qualunque Ipotesi della gravità, quella stessa curva che serve per la scala de' tempi del moto accelerato, sarà la via de' projetti, perchè essendo il tempo della caduta *AF* al tempo della caduta *AG*, come *FC* a *GB*, così essendo ancora equabilmente fatto lo spazio *FC*, e lo spazio *BG* colla velocità impressa per la direzione *AD*, il tempo per *FC* al tempo per *GB* è nella proporzione di detti spazj, dunque in quali tempi si passano equabilmente gli spazj *AE*, *AD* eguali agli detti *FC*, *GB* si passano ancora con moto accelerato gli spazj *EC*, *DB*, ovvero *AF*, *AG*; onde la via del moto composto è la curva *ACB* scala de' tempi del moto accelerato.

PROPOSIZIONE XXXVI.

Secondo la data direzione AD *tirando un mobile con tale velocità, quale si sarebbe acquistata da un grave, cadendo per l'altezza* SA, *fatto il mezzo cerchio* SMA, *il quale sega la direzione* AD *nel punto* M, *e tirata la orizzontale* MT *prolungata altrettanto in* BM: *dico, che la Parabola descritta dal projetto col suo sublime punto* B *toccherà l'orizzontale* TMB, *e si stenderà nell'orizzonte all'ampiezza della base* AH, *quadrupla di essa* BM. Fig. 124.

IMperocchè condotta la *BG* parallela ad *AM*, e tirata la verticale *DBR* per il punto *B*; essen-

ſendo BG dupla di AM, come BT è dupla di TM, ſarà il quadrato BG quadruplo del quadrato AM, ma queſto è eguale al rettangolo SAT, ovvero SAG, per eſſere AM media proporzionale fra il diametro SA, e la porzione AT eguale ad AG, come TM eguaglia MB, dunque il quadrato BG, eſſendo quadruplo del rettangolo SAG, ſarà BG l'ordinata d'una Parabola, il cui diametro AG, ed il lato retto quadruplo di AS. Ma tale Parabola appunto è quella, che deſcrive il proietto quando è mandato per la direzione AD dalla velocità acquiſtata dal grave per la caduta della ſublimità SA, dunque tale Parabola paſſa per lo punto B, e la BR parallela ad AG è un altro ſuo diametro, anzi l'aſse che ſega per mezzo perpendicolarmente l'ordinata HA orizzontale parallela a TB, la quale ſarà tangente di eſſa curva, per eſſere TA eguale ad AG: ma MT è la metà di TB, dunque l'ampiezza HA orizzontale, che è dupla di AR, è quadrupla della TM. Il che &c.

COROLLARI.

Fig. 125. I. Di tutte le proiezioni, che ſi poſſono fare con lo ſteſso impeto, quale ſi acquiſterebbe un grave cadendo dalla ſublimità SA, la maſſima di tutte, cioè quella che coll'ampiezza ſua ſtendeſi maggiormente nell'orizzonte, è quella che ſi fa per la direzione AM, la quale faccia un'angolo ſemiretto colla ſublimità SA, cioè quando il punto M cada nel mezzo dell'arco SMA, perchè allora la MT è la maſſima di tutte le ordinate del ſemicircolo, perchè paſsa per lo centro di eſso, onde la AH quadrupla di TM rieſce la maggio-

re

re che possa essere, mentre le altre ampiezze orizzontali dipendenti da un altra direzione, la quale segasse il semicircolo in altro punto diverso da quel di mezzo, sarebbe quadrupla di un'altra ordinata minore tirata nel medesimo semicircolo.

II. Ma se due tiri saranno fatti con due direzioni *AL*, *AE* egualmente distanti dalla retta *AM*, che facesse l'angolo semiretto *SAM*, concorreranno ambidue le Parabole nate da tali direzioni, cioè le curve *AGI*, *AKI* nello stesso punto *I* dell'orizzonte, divenendo l'ampiezza di ciascun tiro quadrupla delle ordinate *LF*, *NE*, che sono eguali tirate da'concorsi di quelle direzioni coll'arco del semicircolo, perchè essendo queste egualmente lontane dalla *AM*, che fa l'angolo semiretto, tagliano eguali archi *ML*, *ME*, e però sono eguali *SL*, *AE*: onde quelle ordinate *FL*, *EN* sono pure eguali, ed il loro quadruplo *AI* deve essere lo stesso; sicchè volendo mandar la palla al punto *I* tanto è incamminarla per la direzione *AL*, quanto per la *AE* colla stessa velocità, riescendo questo solo divario, che per abbattere un muro verticale sarà più opportuno il prevalersi del tiro basso, che dicesi di volata *AKI*, ma volendo sfondare il piano orizzontale, farà più colpo il tiro superiore *AGI*.

III. Queste tre cose: cioè la sublimità *SA*, Fig. 124. donde il peso acquisterebbe cadendo la medesima velocità, la direzione *AD*, e la lunghezza o ampiezza del tiro *AH*, date due qualunque di esse, è cosa facilissima il determinare la terza secondo i premessi principj.

IV. Per fare varj tiri alla stessa ampiezza, tanto

to minor impeto, e forza di polvere ſi ricerca, quanto la direzione ſi avvicina più all' angolo ſemiretto colla ſublimità SA, di manierachè minimo è l'impeto che ſi richiede facendola al detto angolo ſemiretto.

V. Da un ſolo tiro di Mortaro, o di Cannone ritrovando l'ampiezza della Parabola deſcritta dal mobile, facilmente potrà trovarſi la lunghezza a cui ſi porterebbe il tiro in qualunque altra elevazione del pezzo; e viceverſa può trovarſi l'elevazione che ſarebbe neceſſaria, per fare che giunga il tiro ad un' ampiezza determinata.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Fig. 126. 127. *Dovendoſi tirare un projetto dal luogo* A *al ſito* G *non poſto nel medeſimo piano orizzontale* A E, *ma ſopra o ſotto di eſſo con una velocità quale ſi acquiſterebbe un grave cadendo dalla ſublimità* S A; *ſi cerca la direzione del tiro.*

COngiunta AG, e prolungata la verticale SA al di ſotto verſo F, ſi faccia ſopra la retta SA una porzione di cerchio capace dell' angolo GAF, e poſta AH eguale ad un quarto della AG ſi alzi la verticale HM. Se queſta non concorre coll' arco circolare AMS, non ſarà ſufficiente la detta velocità per condurre il projetto da A in G, ma ci vorrà un altezza maggiore: che ſe concorre in eſſo nel punto M, ſi congiunga AM, e facciaſi il tiro ſecondo la ſteſſa direzione AM; dico, che anderà a ferire il projetto nel punto deſtinato G.

Imperocchè, tirata MN parallela ad AG, e diviſa per mezzo AG in I ſi alzi la verticale IC concor-

corrente con essa NM in C, e congiunta CHB, che sarà parallela ad AM (perchè essendo AH eguale ad HI, ancora NM è eguale ad MC, per esser parallele le verticali AN, MH, IC, e però AI eguale ad NC nel parallelogrammo $ANCI$, sarà MC eguale ad AH, per esser ambedue la metà delle rette eguali NC, AI) e condotta GF, parimente parallela alla stessa AM, se si congiunge SM, sarà per la costruzione l'angolo SMA eguale all'angolo GAF, ovvero all'angolo MNA, dunque essendo ne' triangoli SMA, MNA gli detti angoli eguali, e l'angolo MAN comune a tutti due, saranno essi triangoli simili. Dunque SA, ad AM stà come AM ad AN, ovvero all'eguale AB, siccome MN eguaglia MC, dunque il rettangolo SAB eguaglia il quadrato AM, ovvero l'eguale quadrato BH, e presi i quadrupli sarà il rettangolo della quadrupla AS nella AB, eguale al quadrato BC, il quale è quadruplo del quadrato BH, per essere quella dupla di questa, ed essendo ancora la GF dupla di BC, siccome è quadrupla di BH, essendo FA quadrupla di AB, e la GA di AH, sarà il quadrato GF pure eguale al rettangolo della quadrupla di AS nella retta AF, onde è manifesto, che il punto G sarà nella stessa Parabola descritta per gli punti A, C, G, il cui diametro sia AF, ed il lato retto sia quadruplo della sublimità SA, però fatto il tiro colla data velocità secondo la direzione AM, dovrà andare il projetto a battere nel punto G. Il che &c.

COROLLARI.

I. E' manifesto, essere la NC tangente della Pa-

rabola nel punto C, per essere AB eguale ad AN.

II. Se la retta HM sega in due punti M, m l'arco $AMmS$, si potrà fare il tiro anche colla direzione Am, descrivendo la Parabola superiore. Ma se HM tocca l'arco suddetto nel suo punto di mezzo, sarà possibile una Parabola sola, e questa manderà il tiro sul piano AG più lontano che sia possibile, perchè l'ordinata MN riuscirà la massima di tutte, ed essendo AG quadrupla di essa, siccome è quadrupla di AH eguale ad NM, il luogo G, dove cade il projetto, sarà lontanissimo dal punto A d'onde si fa il tiro.

Fig. 128

III. Dunque il più ampio tiro, che possa farsi sul piano AG, sarà quello, in cui la direzione AM sega per mezzo l'angolo SAG contenuto da detto piano AG, e dalla verticale SA, perchè essendo HM parallela ad AS, e toccando l'arco AMS nel punto di mezzo M, gli angoli MAH, MAS saranno eguali, essendo MAH eguale all'angolo ASM: onde essendo gli archi AM, SM eguali, bisogna che l'angolo MAH eguagli l'angolo MAS, e qualunque altro tiro sarà di maggiore ampiezza, secondo che più accosterà la sua direzione a quella AM, che taglia per mezzo l'angolo SAG.

CAPITOLO VIII.

Della Percossa.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

La percossa, che fa un corpo duro sopra la superficie ferma di un piano, cresce in ragione composta

posta del peso del corpo mosso, e della velocità con cui urta, e del seno dell' incidenza, cioè del seno di quell' angolo contenuto dalla direzione del mobile sopra la superficie del piano percosso nel punto di esso contatto.

CHe la percossa cresca a misura, che sia maggiore il peso, e la velocità del mobile, è manifesto, perchè in tale ragione appunto cresce il momento di un corpo, cioè la forza con cui si muove, e da cui senza dubbio dipende l' energía della percossa in pari circostanze, cioè secondo la medesima direzione la forza è maggiore, sì per il maggior peso del mobile, come ancora per la maggiore velocità, con cui sia spinto.

Che poi cresca ancora questa forza della percossa, secondo che cresce il seno dell' incidenza, si dimostra così. Muovasi il corpo *A* contro il piano fermo, e stabile *EF* colla direzione inclinata *AB*, e condotta sopra esso piano la perpendicolare *AC*, congiunta *BC* si compisca il rettangolo *BCAD*: il moto per *AB* si può risolvere ne' due moti collaterali *AC*, *AD*, de' quali è composto. Ma essendo il moto *AD* parallelo al piano *BC*, non gli si oppone punto, e non può offenderlo quando ancora fosse di vetro, dunque il moto per *AB* non ha forza di percuotere il piano *BC* secondo il moto collaterale *AD*, ma solamente secondo il perpendicolare *AC*; ed è *AC* il seno dell' angolo dell' incidenza *ABC*, computando *AB* per il raggio, dunque cresce l' energía della percossa, generalmente parlando, in ragione composta del peso, e della velocità del mobile, e del seno dell' incidenza. Il che &c.

Fig. 129.

 Co-

Corollari.

I. Possono farsi eguali percosse sopra una superficie stabile e ferma, tanto da un corpo minimo, come da un altro grandissimo, qualunque volta, o la velocità, o il seno dell'incidenza compensi reciprocamente in quello, ciò che ha questi di eccesso nel peso: come per esempio, stante la stessa direzione, tanta percossa farà sopra d'un piano il martello d'una libbra mosso con dieci gradi di velocità, quanto ne farebbe un martello di dieci libbre mosso colla velocità d'un grado solo, ed ancora se amendue si movessero con pari grado di velocità, purchè il seno dell'incidenza del minore fosse dieci volte maggiore del seno d'incidenza nell'altro, ne seguirebbe egual colpo; siccome ancora in due corpi di egual peso, se la velocità del primo fosse tanto maggiore della velocità del secondo, quanto il seno d'incidenza di questo è maggiore del seno d'incidenza di quello, ne seguirebbe eguale percossa, perchè la ragione composta di due reciproche eguali, fa sempre la ragione di egualità, come in due rettangoli quando la ragione del primo lato dell'uno, al primo lato dell'altro è eguale alla ragione del secondo lato dell'ultimo, al secondo lato del primo, essi rettangoli sono eguali,

II. Ancora ne risulterebbero eguali percosse per la medesima ragione, quando i seni dell'incidenza fossero reciprochi a' momenti de' mobili, cioè a' prodotti del peso di ciascheduno nella sua velocità, oppure quando i loro pesi fossero reciprochi a i prodotti della velocità di ciascuno nel

suo

ſuo ſeno d'incidenza, oppure finalmente quando le velocità de' mobili foſſero reciproche a' prodotti del peſo di ciaſcuno nel ſuo ſeno d'incidenza.

III. E la maſſima percoſſa di un dato peſo, moſſo con una data velocità, è quando urta con direzione perpendicolare alla ſuperficie del corpo percoſſo, eſſendo il maſſimo ſeno dell'incidenza quello, che corriſponde all'angolo retto.

PROPOSIZIONE XXXIX.

Le percoſſe fatte da una maſſa fluida, come acqua, o aria ſpinta col vento &c. contro varie ſuperficie piane, ſono ſempre in una direzione perpendicolare alla medeſima ſuperficie, e creſce la loro forza in ragione compoſta della quantità di eſſe ſuperficie percoſſe, e della duplicata ragione delle velocità, e di quella de' quadrati de' ſeni d'incidenza.

Tavola XV. Fig. 130.

IMperocchè può conſiderarſi un fluido come una congerie di tante minutiſſime sferette, che vengono ad urtare ſecondo la direzione *ABF* della corrente del fluido, contro la ſuperficie *DE*, e ciaſcuna di queſte sferette urta nel piano ſecondo la direzione della linea *BC*, congiungente il centro di eſſe col punto del contatto, la qual linea è ſempre perpendicolare alla ſuperficie percoſſa, dunque per quanto ſia inclinato il piano, che riceve il colpo dal fluido, ſempre reſta ſpinto ſecondo la direzione perpendicolare, non ſecondo l' inclinata, e così benchè una vela riceva il vento obliquamente, ed il timone non ſi ponga perpendicolare al corſo dell'acqua, ſempre il moto, che

ne deriva sarà per se stesso perpendicolare alla vela, o al timone suddetto.

Oltre a ciò, se l'estreme linee parallele del fluido siano per esempio AB, EF, e col raggio FB si descriva l'arco BH, condotto HI seno dell'angolo d'incidenza EFB, ed anche tirata la BG perpendicolare alla EF, sarà la BG eguale ad HI, ma la BG è la misura della quantità del fluido compreso tra l'estreme linee parallele del fluido EF, AB, la quale quantità è quella, che urta contro questa traccia BF del piano percosso, e ne misura la larghezza BG: dunque la percossa, per conto della materia spinta sopra questa traccia, misurasi da essa BG, e così ancora dall'egual seno HI, ma per conto dell'obliqua incidenza si misura altresì dal medesimo seno HI, per l'antecedente proposizione, dunque sarà misurata dal quadrato del seno dell'incidenza, in parità dell'altre circostanze.

Fig. 131.

Nè vi ha dubbio, che quanto maggiore è la superficie percossa, tanto più cresca la massa del fluido che vi dà sopra, e si fa maggiore l'impressione fatta in essa, dunque ancora per questo capo cresce la forza del colpo.

E perchè quanto maggiore è la velocità del fluido, tanto maggior copia di esso in un dato tempo successivamente si applica ad urtare il piano opposto al suo corso, quindi è, che la percossa cresce ancora in duplicata ragione della velocità, e però la proposizione resta dimostrata in tutte le sue parti, cioè, che quantunque obliqua sia la direzione del fluido, percuote perpendicolarmente la superficie opposta, e che la forza della percossa

cossa cresce in ragione composta della quantità di essa superficie, della duplicata ragione delle velocità, e dei quadrati de' seni dell'incidenza.

PROPOSIZIONE XXXX.

Qualunque vastissimo corpo solido A, *purchè sia pensile, o galleggiante, o in qualsivoglia maniera equilibrato al moto, potrà esser mosso dalla sua quiete da qualunque minimo corpo solido* B, *che vi urti dentro con qualunque velocità* FD.

PIglisi un corpo *C* eguale ad *A*, e sia come *C* a *B*, così la velocità *FD* alla velocità *E*, dunque sarà eguale il momento del corpo *B* mosso colla velocità *FD*, e del corpo *C* mosso colla velocità *E*; onde tanto quello, che questo farà eguale percossa in *A* (per il Coroll. della Proposiz. 38.): ma è certo, che il corpo *C*, urtando colla velocità *E* nel corpo quieto *A* eguale a lui, potrà muoverlo, dunque ancora il corpo minimo *B*, mosso colla velocità *FD*, dovrà muovere esso corpo *A* dalla quiete. Fig. 132.

PROPOSIZIONE XXXXI.

Poste le stesse cose dico, che il corpo B *non communicherà al percosso* A *tutta la sua velocità* FD, *ma solamente quella parte* FG, *la quale all'intera* FD, *stia come esso corpo* B *alla somma d'ambidue i corpi* B, *ed* A, *supponendo però essi corpi esser duri, non dotati di forza elastica*.

IMperocchè applicandosi la velocità *FD* del corpo *B* ad ambidue i corpi *B* ed *A*, bisogna, che il momento del solo corpo *B*, mosso prima colla

velocità FD, sia eguale al momento, con cui insieme si muoveranno i due corpi B ed A, dunque bisogna, che come B alla somma d'ambidue B, ed A, così stia la velocità di questi due mossi alla velocità del primo, e però conviene, che la velocità di questi due sia FG, la quale stia alla prima velocità FD, come il percuziente B alla somma del percuziente e del percosso, che vanno insieme B ed A. Il che &c.

PROPOSIZIONE XXXXII.

Movendosi due corpi A *e* B *verso la medesima parte, se hanno la stessa velocità mai si percuoteranno, e molto meno quando l'antecedente avesse maggiore velocità del susseguente; Ma se la velocità del conseguente corpo* A *sia maggiore di quella dell'antecedente* B, *quello percuoterà questo, coll'eccesso della velocità sua sopra quella dell'altro.*

Fig. 133. IMperocchè se i corpi sono egualmente veloci, quando abbiano qualche distanza, manterranno sempre la medesima, o se si toccano, anderanno sempre contigui senza impressione di colpo veruno; Che se fosse poi maggiore la velocità dell'antecedente B, di quella del conseguente A, sempre maggiormente si dilaterebbe la loro distanza in questi moti, crescendo lo spazio fatto dal precedente, sopra il fatto dal susseguente nel medesimo tempo, onde molto meno potranno mai percuotersi: ma essendo maggiore la velocità del corpo di sotto A, che quella dell'antecedente B, si suppongano essere tali velocità come AD a BD, dunque nello stesso tempo converranno in D ambi-

bidue gli corpi, facendo gli ſpazj *AD*, *BD* proporzionali alle loro velocità, onde al corpo *B* riſulterà la percoſſa del conſeguente *A*, ſecondo la velocità *AB*, che è l'eccelſo di *AD* ſopra *BD*; imperocchè colla parte di velocità *BD*, non può il corpo *A* percuotere *B*, eſſendo comune tale velocità allo ſteſſo corpo *B*, con cui sfugge quella parte di colpo, onde reſta che ſolamente il corpo *B* ſenta l'urto dal corpo *A* di quell'ecceſſo di velocità *AB*. Il che &c.

Corollari.

I. Quindi prevedendo noi il colpo di qualche corpo, che ci venga addoſſo, ſe non ſi può del tutto ſchivare, gioverà il muoverſi quanto più velocemente ſi poſſa verſo la medeſima parte, che così tanto minore riſulterà la forza del colpo fatto dal percuziente.

II. Il moto comune non altera i movimenti proprj de' corpi, e però la ſteſſa percoſſa riſulta, percuotendoſi due corpi ſul tavolato di una nave quando ſtà ferma, che quando ſia in qualunque moto veloce, il qual moto ſarebbe egualmente partecipato dal corpo percuziente, e dal percoſſo.

PROPOSIZIONE XXXXIII.

Viceverſa, incontrandoſi i corpi colle velocità AD. BD, *faranno nel punto* D *tale percoſſa, come ſe uno di loro urtaſſe nell' altro fermo, e ſtabile, con l' aggregato d' ambe le velocità, cioè con l' intiera* AB.

PEr dimoſtrare ciò più facilmente, ſi ſuppongano i corpi *A*, *B* incontrarſi aſſieme ſul tavolato Fig. 134.

to

to d'una barca, la quale frattanto si muova colla velocità *DB* al contrario verso *E*. Chi vedrà questo movimento nello stare sopra la ripa *HE*, senza por mente al moto del Navicello, ma tenendo l'occhio solamente alle palle mobili *A*, *B*, vedrà che la palla *A* nello spazio reale del Mondo si muoverà colla velocità *AB*, perchè oltre la propria velocità *AD*, partecipa ancora quella della barca *DB*, che si muove per la stessa parte, onde portandosi dal punto *A*, che corrispondeva al punto *H* della ripa, al punto *D* sul tavolato della navicella, che era dirimpetto al punto *G* della ripa, coll'altra velocità *DB*, che partecipa dalla nave, arriverà a corrispondere al punto *F* della ripa, che prima era dirimpetto al punto *B* del navicello: onde essendo realmente scorso nello spazio mondano il mobile *A* uno spazio eguale ad *HF*, cioè ad *AB*: laddove il mobile *B*, benchè s'incontri verso *A* colla velocità *BD* sopra il piano della nave, e nello stesso tempo sia tirato colla velocità *DB* eguale, per cui si muove la navicella, rimarrà sempre dirimpetto al punto fisso *F* della ripa in tutto il tempo di questi moti, onde non si vedrà esser mosso nello spazio mondano, che occupava, dunque il corpo *A* percuoterà con tutta la velocità *AB* il corpo *B* in quiete: ma la stessa percossa accade nella nave ferma, che in quella la quale si muove, come nell'ultimo Coroll. della precedente, dunque il colpo fatto da' corpi *A*, *B*, che si incontrino in *D* colle velocità *AD*, *BD*, è il medesimo che risulterebbe se uno di essi con l'aggregato di ambe le velocità venisse ad urtar l'altro. Il che &c.

Co-

Corollario.

Quando un mobile venisse ad urtarci, non torna il conto muoversi contro d'esso, perchè si accrescerebbe la forza della percossa di tanta velocità, quanta è quella con cui l'incontriamo.

PROPOSIZIONE XXXXIV.

Di due corpi duri A, B *essendo il centro di gravità* C, *se s' incontrano colle velocità* AC, BC, *di essi corpi* A, *e* B, *dovrà fermarsi e l'uno, e l'altro in esso punto* C *del mutuo concorso; ma se fussero detti corpi ancora elastici, dovrà ciascuno ritornare indietro colla sua primiera velocità.*

Imperocchè essendo C il centro di gravità de' corpi, sarà A a B come BC a CA, cioè come la velocità di questo alla velocità di quello, dunque i loro momenti con cui s' incontrano in C sono eguali, ed essendo pure direttamente opposti, niuno di essi può prevalere all' altro, onde (per l' Ass. 4.) si elideranno vicendevolmente, riducendosi i detti corpi duri alla quiete, purchè non fossero da qualche altra cagione di nuovo eccitati al moto: ma se ciascuno di essi avesse la forza elastica, non potrà essere ciascuna di esse compressa con egual momento da una, e dall' altra banda, ma a guisa di molla restituendosi con egual forza, verrà respinto l' uno, e l' altro mobile per la stessa direzione, e colla medesima loro velocità all' opposte parti, di manierachè, siccome con egual momento si erano incontrati, si disgiungeranno altresì uno dall' altro con egual momento. Il che &c.

Fig. 135.

PRO-

Fig. 134. 136. 137. 139.

PROPOSIZIONE XXXXV.

Movendosi due corpi duri, ma non elastici colle velocità AD, BD, *o dirette, ovvero a parti opposte, trovato il loro centro di gravità* C, *dico, che dopo il concorso si muoveranno ambidue colla velocità* CD *verso quella banda, che dimostra l' ordine delle lettere* CB.

SI faccia questo moto sul tavolato di una Barca, la quale frattanto si muova verso *C*, colla velocità *DC*; chi starà sulla ripa *EH*, e riguarderà il moto di questi mobili, vedrà muoversi il corpo *A* nello spazio mondano colla velocità *AC*, ed il corpo *B* colla velocità *BC*, perchè il moto della barca cospirando col moto dell' uno, ed opponendosi al moto dell' altro (anzi al moto di tutti due ne i due ultimi capi) si accresce la velocità di quello che va per la stessa banda, così diminuisce la velocità di questo, quando si rivolge alla banda opposta, dunque saremo nel caso dell' antecedente proposizione, in cui convengono i corpi nel loro centro di gravità *C* dentro lo spazio mondano, in cui per tanto debbono ambidue fermarsi, ma la barca col suo moto gli trasferisce da *D* in *C*, dunque per mantenersi nello stesso spazio mondano, bisogna che l' uno, e l' altro sul piano della nave si muova all' opposto con altrettanta velocità *CD*: ma ciò che accade nella barca mossa, accaderebbe ancora stando essa ferma, o in un altro piano mobile facendosi i medesimi moti (per il Coroll. 3. Prop 42.) dunque è vero ciò, che in questa proposizione doveasi dimostrare.

Co-

COROLLARI.

I. Se uno de' corpi per esempio *B* fosse quieto, la sua velocità *BD* sarebbe nulla, e cadendo il punto *D* in *B*, si muoverebbero ambi i corpi dopo il colpo colla velocità *CD*, cioè *CB*, la quale stà a tutta la velocità *AD* del mobile *A*, come il corpo percuziente *A*, alla somma di ambidue *A*, e *B*, perchè essendo *B* ad *A*, come *AC* a *CB*, componendo stà la somma di ambidue *A*, e *B* ad *A*, come *AB* a *BC*. Fig. 138.

II. Ma cadendo il punto *D* nel punto *C*, sarebbe ciò il caso della proposizione 44. onde dopo il concorso si fermerebbero ambidue, diventando nulla la velocità *CD*. Fig. 135.

III. Lo stesso segue se il corpo *A* si movesse contro un corpo *B* immensamente maggiore, e quieto, o in un ostacolo fermo urtasse, perchè il loro centro *C*, ed il punto *D*, caderebbero nello stesso punto *B*, e però si fermerebbe esso corpo duro *A* dopo la percossa, essendo ancora quì la velocità *CD* nulla. Fig. 140.

PROPOSIZIONE XXXXVI.

Poste le stesse cose, quando i corpi fossero elastici, prendendo dall'altra parte CE *eguale a* CD: *dico, che dopo il colpo si muoverà il corpo* A *colla velocità* EA, *ed il corpo* B *colla velocità* EB *secondo l'ordine delle stesse lettere.* Fig. 141. 142. 143. 144. 145. 146.

IMperocchè movendosi, come prima, la Nave colla velocità *DC*, ovvero *CE*, che è la stessa, ne seguirà, che il mobile *A* dovrà muoversi nel-

nello spazio mondano colla velocità AC, ed il corpo B colla velocità BC, onde con eguali momenti incontrandosi, ritorneranno indietro (per la Prop. 4) colle stesse loro prime velocità, cioè il corpo A colla velocità CA, e l'altro B colla velocità CB, ma intanto movendosi la nave colla velocità CE, bisognerà che in sul tavolato di essa i detti corpi si muovano colle velocità EA, EB, perchè la somma de' moti cospiranti, e la differenza degli opposti risulterà nello spazio mondano quella che dee essere, cioè del muoversi i mobili dopo il colpo colle velocità suddette CA, CB, ma ciò che accade nel navicello mosso, parimente succederebbe in un piano stabile, e fermo, dunque le velocità, colle quali si muovono i corpi dopo il loro concorso, saranno le disopra determinate EA, EB. Il che &c.

Corollari.

Fig. 147. 148. I. Se il corpo B stesse fermo essendo nulla la sua velocità BD, cade il punto D in B, onde CB eguaglia CD, e però EB è doppia di CB, onde essendo AC a CB come B ad A, e componendo AB a CB come la somma di A, e B al percuziente A, sarà la velocità AD, che eguaglia AB alla velocità ED impressa al percosso prima fermo, come la somma di A, e B al doppio del percuziente A.

II. La velocità EA dopo la percossa di A al corpo fermo B, se A è minore di B, sarà alla prima Fig. 147. sua velocità AD, come l'eccesso di B sopra A alla somma di A, e B, e muoverassi all'indietro, essendo AE eguale a CA meno CE, che è lo stesso

ſo come CA meno CB, e però come B meno A. Ma ſe A foſſe maggiore di B, eſſendo più proſſimo il centro C ad A che a B, la CE eguale a CB paſſerà oltre A, onde la velocità EA dopo la percoſſa, ſarà alla primiera AD, come A manco B alla ſomma di ambedue, eſſendo AE la ſteſſa che CE manco CA, ovvero CB manco CA, e però eguale ad A manco B, e con queſta velocità EA muoveraſſi verſo la medeſima parte, eſſendo però maggiore la velocità EB del percoſſo, che la velocità EA rimaſta nel percuziente, ed eſſendo la velocità EB alla velocità EA, come il doppio del percuziente all' eceſſo del percuziente ſopra il percoſſo. Fig. 148.

III. Che ſe i corpi A, e B fuſſero eguali, cadendo il centro C in mezzo ad AB, e ſtando fermo il corpo B, ſarà CA eguale a CE, eguagliando la CD, che è la ſteſſa di CB; dunque cadendo il punto E in A, la velocità EA ſarà nulla, e la EB eguale ad AD, ſicchè il percuziente reſterà fermo, ed il percoſſo prima fermo, riceverà la velocità del percuziente, onde quindi avviene, che urtando una palla nella ſerie di più altre palle eguali ferme e contigue, dovrà fermarſi eſſa percuziente colle altre proſſime intermedie, e ſolamente muoverſi l'ultima colla ſteſſa velocità, con che la prima percoſſe coteſta ſerie. Fig. 149.

IV. Incontrandoſi poi le palle A, B, tra loro eguali con velocità diſuguali AD, BD, ritorneranno indietro, ſe prima ſi opponevano, o anderanno alla medeſima parte, ſe tutte due movevanſi a quel verſo, colle velocità cambiate tra loro, cioè la palla A colla velocità EA, eguale alla velocità BD, Fig. 150. 151.

e la

e la palla *B* colla velocità *EB* eguale alla velocità *AD*, perchè dividendo il centro *C* la distanza *AB* per mezzo, ed essendo ancora *CE* eguale a *CD*, è manifesto, che resta *EA* eguale a *BD*, e riesce *EB* eguale ad *AD*.

Fig. 152. Tavola XVI. Fig. 153. V. Essendo disuguali le palle *A*, *B*, se la velocità della prima *A D* alla velocità della seconda *BD*, sarà come il doppio di *B* alla differenza di *A*, e *B*, si fermerà dopo il concorso il percuziente *A*, e muoverassi il corpo *B* percosso colla velocità *EB*, la quale starà alla prima *BD*, come la somma di *A*, e *B* alla loro differenza; imperocchè essendo *C* il centro di gravità di tali corpi, e però *A* a *B*, come *CB* a *CA*, posta *C D* eguale a *CA*, sarà *AD* a *B D* come il doppio di *AC* a *CB* meno *AC*, ovvero nella seconda figura ad *AC* meno *CB*, e però il doppio di *DB* alla differenza de' corpi *B* ed *A*, è come la velocità *AD* alla velocità *B D*, dunque essendo *CE* eguale a *CD*, e però eguale a *CA*, cade il punto *E* in *A*, onde si ferma il corpo *A*, di cui nulla sarebbe la velocità *EA*, e la velocità *EB* del corpo *B*, sarà alla velocità *BD*, come la somma di *AC*, e *CB* alla differenza di *CA*, e *CB*, onde è come la somma di *A*, e *B* alla differenza di essi corpi.

Fig 154. VI. Se il corpo *A* è triplo di *B*, i quali s' incontrino con eguali velocità *A D*, *B D*, dopo la percossa fermerassi il corpo *A*, ed il corpo *B* tornerà indietro colla velocità *EB* dupla della prima *B D*; imperocchè divisa *A B* in quattro parti, sarà il punto *D* nel mezzo, per essere *A D* eguale a *BD*, ed il punto *C* in mezzo di *AD*, dovendo essere *BC* tripla di *CA*, come il corpo *A* è triplo di *B*

di B, dunque posta CE eguale CD, caderà il punto E in A, onde la velocità EA sarà nulla, e la velocità EB sarà doppia di BD.

VII. Viceversa se il corpo A triplo di B stesse fermo, e fosse urtato da B colla velocità BD, cadendo il punto D in A, sarà CD eguale a CA, cioè alla terza parte di CB, onde posta CE eguale a CD, caderà il punto E nel mezzo di AB, e però dopo la percossa, essi corpi si muoveranno con eguali velocità EA, EB in parti contrarie. Fig. 155.

VIII. Se il percuziente A urtasse nel corpo B fermo, ed infinitamente maggiore di A, tornerebbe A all'indietro colla stessa velocità con cui si è spinto in esso, perchè i punti B, D, C, saranno nello stesso sito, essendo infinitamente maggiore B di A: dunque AC è infinitamente maggiore di BC, e però BC è quasi nulla, ed essendo ancora D nel punto B, essendo nulla la velocità BD, facendo CE eguale a CD, ancora il punto E cade nel medesimo sito, dunque la velocità EA, con cui deve ritornare indietro il corpo A, sarà eguale alla velocità AD, con cui percuoterà il corpo B, ed esso corpo B rimarrà fermo come prima, essendo ancora EB infinitamente piccola, e come un nulla. Questo caso accade urtando una palla in qualche rupe, o in un muro stabile, che equivale ad un corpo infinitamente maggiore del percuziente. Fig. 156.

PROPOSIZIONE XXXXVII.

Se il mobile A, *colla velocità* A D, *urta qualunque altro mobile* B, *ovvero* N *che stava fermo, essendo essi mobili* A, B, N, *come le linee* C A, C B, C N, *posta* CE *eguale a* C A, *e tirata* E L *parallela ad* A D, Fig. 157.

e per lo punto D *descrivendo l' Iperbola* DSV *fra gli Assintoti* EA, EL, *tirando le rette* BS, NV *parallele all'* AD, *la velocità impressa in* B *sarà* BS, *e l' impressa nell' altro mobile sarà* NV, *e così da per tutto*.

IMperocchè per la proprietà dell' Iperbola, essendo BE ad EA, come AD a BS, ed ancora NE ad EA, come AD ad NV, sarà AD a BS, come la somma di BC, e CA, che è BE, al duplo di CA, che è EA, ed in conseguenza come la somma de' mobili A, B al duplo del percuziente A: ma (per il Coroll. 3. della Prop. precedente) la velocità del percuziente AD, sta alla velocità impressa nel percosso, che era fermo, come la somma di detti mobili al duplo del percuziente, dunque la velocità impressa al percosso B, deve essere come BS, ed al percosso N, come NV, essendo AD a BS, come BE ad EA, ed AD ad NV, come NE ad EA, e così sempre. Il che &c.

COROLLARIO.

Tirando per lo punto D la DK parallela ad AE, segante la BS in F, e l' NV in G, il percuziente A, dopo la percossa del mobile fermo N maggiore di esso, si muoverà al contrario colla velocità VG, e dopo la percossa del mobile B minore di A, dovrà muoversi verso le medesime parti colla velocita FS, essendo tanto FS, che GV la differenza della prima velocità AD, e della velocità impressa agli altri mobili BS, NV (per il Coroll. 2. della Prop. precedente).

PRO-

PROPOSIZIONE XXXXVIII.

Se un corpo elastico A, *colla velocità* A D, *percuotesse il corpo fermo* B, *per mezzo d' un altro corpo* N *di mediocre grandezza fra gli due estremi, gl' imprimerà maggiore velocità di quella, che gli avrebbe impressa, se urtava immediatamente in esso.*

Fig. 158. 159.

Imperocchè descritta l' Iperbola come nella precedente, è manifesto, che sarà NV la velocità impressa nel corpo medio N, e la velocità BS sarebbe quella che darebbe immediatamente al corpo B; ma posta CH eguale a CN, e condotta HG parallela ad NV, se per il punto V si descrive l' altra Iperbola IVF, segante la BS in F, il mobile N colla velocità NV darebbe al corpo B la velocità BF, la quale è maggiore della BS impressali immediatamente dal corpo A, dunque maggiore è la velocità impressa dal corpo percuziente A nel corpo fermo B, per mezzo d' un altro corpo N di mediocre grandezza fra gli estremi, che se immediatamente lo urtasse. Il che &c.

COROLLARI.

Fig. 160.

I. Interponendosi a' corpi A, e B altri intermedj N, O, P &c. successivamente disuguali tra i detti estremi, maggiore velocità si trasfonderà nel medesimo corpo B, che se per un solo intermedio venisse percosso. Imperocchè siccome A urtando in B, per mezzo di N, gl' imprime velocità maggiore che se lo percuotesse immediatamente, dunque ancora N darebbe maggior velocità a B per mezzo d' un altro corpo intermedio O, che se

urtasse immediatamente in esso: e similmente il corpo *O* darebbe maggiore velocità al corpo *B* per mezzo dell' intermedio *P*, che se urtasse in esso immediatamente, dunque quanto maggiore sarà la moltitudine de' corpi interposti fra *A* e *B* (purchè siano tutti di mediocre grandezza successivamente disuguale) tanto sarà maggiore la velocità impressa nel corpo *B*.

II. Se un corpo intermedio *N* fosse medio proporzionale fra' due estremi *A* e *B*, s' imprimerebbe dal corpo *A* al corpo *B*, per mezzo di questo medio proporzionale *N*, maggiore velocità che se fosse percosso per mezzo d' un altro corpo mediocre *O*, il quale non fosse medio proporzionale tra *A* e *B*, come può dimostrarsi con varj esempi.

III. E conseguentemente se tra' corpi *A* e *B*, sarà interposta una serie di corpi mezzani *N*, *O*, *P* &c. continuamente proporzionali, si communicherà maggiore velocità all' estremo corpo *B*, che per mezzo di altrettanti corpi intermedj i quali disposti non fossero in quella proporzione.

IV. E tanto maggiore sarà la velocità comunicata all' estremo corpo *B*, quanto sarà maggiore la moltitudine de' corpi proporzionali interposti, di manierachè, secondo il computo fatto da Cristiano Ugenio, se fussero cento corpi in continua proporzione dupla, cominciando il moto dal massimo, si comunicherebbe al minimo una velocità 14760000000. di volte maggiore di quella, con cui principiò a muoversi il primo, e che principiando il moto dal minimo, giacchè non risulterebbe nel massimo velocità maggiore della prima, dovendo ca-

la

lare la velocita che s'imprime ad un corpo maggiore, sarebbe però il momento del moto nel corpo massimo, maggiore del momento, con cui vi si principiò a muovere il minimo, in ragione di 4677000000000. all'unità. E chi sa, che la natura in molti riscontri, ne' quali si vede all'improvviso nascere una rapidissima agitazione, cagionata da un primo moto assai lento, come nelle fermentazioni de' liquori, o de' vapori, e nell'accensione della polvere, non si serva di questo segreto, disponendo più corpi invisibili a un dipresso nella medesima proporzione crescenti o decrescenti, coll'intermezzo de' quali venga a crescere in immenso la quantità del moto, o la velocità che gli rimane comunicata.

PROPOSIZIONE XXXXIX.

Se le direzioni delle due palle mobili A, B *non sono nella medesima retta linea, ma in due tra di loro inclinate* AD, BD, *essendo la velocità di* A *a quella di* B, *come* AD *a* BF, *trovare primieramente il sito, in cui essi mobili dovranno convenire insieme: ed in secondo luogo, determinare quali direzioni, e velocità ripiglieranno dopo detto concorso.*

Fig. 161 162.

Quanto alla prima parte, congiungasi la retta AB, e poi si compisca il parallelogrammo $BADK$, e nella DK pongasi la parte DM eguale alla somma de' raggi di queste due palle mobili, e congiunta KF, descrivasi col raggio DM l'arco circolare MG, segante la FK in G, indi congiunta DG, si tiri GH parallela a BK, e poi si compisca il parallelogrammo $DGHI$: dico, che nella retta IH dovranno convenire essi mobili, toccandosi

dosi in L; Imperocchè, essendo AD eguale a BK, e DI eguale ad HG, sarà AD a DI come BK ad HG, e però come BF ad FH, onde permutando come la velocità AD alla velocità BF, così sarà DI ad FH, ed il rimanente spazio AI al rimanente BH, dunque nel medesimo tempo si faranno detti spazj proporzionali alle loro velocità, e però giunta A in I, sarà pure arrivata B in H, e perchè IH è eguale a DG, ed a DM, cioè a' due raggi di dette palle, vi saranno le due parti IL, HL eguali a' loro raggi, e però ivi le due palle A, B verranno a toccarsi in L.

Tavola XVII. Fig. 103.

Circa la seconda parte, si tirino da A e da B sopra IH le perpendicolari AM, BN, e si tiri ancora dal punto del contatto L la perpendicolare LK, che sarà tangente di detti mobili, onde essendo il moto per AI composto de' moti per AM e per MI, ed il moto per BH composto de' moti per BN, e per NH, ma gli due moti AM, BN non faranno alcun colpo in dette palle, essendo equidistanti alla loro comune tangente LK, dunque solamente con le velocità MI, NH, secondo la direzione comune HI, si percuoteranno. Per tanto condotta dal punto D la retta DE parallela ad HI, e compiuti i parallelogrammi $DIMa$, $DHNb$, potrà esprimersi in questa retta l' urto che farebbero i mobili posti in a ed in b, quello con la velocità aD, la quale è eguale ad MI, e questo con la velocità Db, eguale ad NH, e determinato il punto C per centro di gravità di essi mobili, ed alla CD posta eguale CE, dovranno dopo il concorso muoversi, A con la velocità Ea, e l' altro mobile B con la velocità Eb, mantenendo

però

però ancora la velocità di quelle direzioni perpendicolari tra loro parallele, le quali non possono variarsi: dunque posta IP eguale ad Ea, ed erettavi la perpendicolare PQ eguale ad AM, congiunta IQ, sarà la direzione e la velocità con cui il corpo A dovrà muoversi dopo il concorso col corpo B: e posta similmente HO eguale ad Eb, e tirata la perpendicolare OR eguale a BN, congiunta HR, sarà la direzione e la velocità con cui si muoverà il corpo B dopo il concorso con A. Il che &c.

COROLLARI.

Fig. 164.

I. Se il corpo B fosse quieto, ed in esso urtasse obliquamente il corpo A colla direzione AI, venuto al di lui contatto, e congiunti gli centri loro colla retta BI, sopra di cui sia tirata la perpendicolare AM, esso corpo A non farà alcuna impressione in B colla direzione e velocità AM per esser parallela ad LK tangente d' ambidue ne' loro contatti, ma solamente colla direzione e velocità MI, onde posta BH eguale ad MI, talmente riuscirebbe questa percossa, come se il corpo A fosse in H, ed urtasse il corpo B prima quieto con tale velocità HB, però divisa HB in C, di manierachè sia HC a CB, come B ad A, che sarebbe C il centro di gravità di essi pesi, quando A fosse in H, posta CE eguale a CB, si muoverà il corpo B nella stessa linea, cioè per BN, eguale ad EB, e posta IP eguale ad EH, tirata la perpendicolare PQ eguale ad AM, congiunta IQ, si muoverà il corpo A dopo la percossa, con la direzione e velocità IQ, perchè averà nella direzio-

ne IP la velocità eguale ad EH, e nella PQ parallela, ed eguale ad AM, la stessa direzione e velocità, che prima aveva, e che non resta alterata in tale percossa, dunque anderà col moto composto di queste due velocità e direzioni, cioè per IQ.

II. Se ambidue questi corpi fossero tra di loro eguali, comecchè tutta la velocità MI si comunicherebbe al corpo B, dovrebbe muoversi il percuziente A colla sola direzione e velocità della perpendicolare IS, eguale ad AM, e parallela ad essa, non essendo questa alterata in detta percossa, ma solamente perdutasi l'altra velocità MI comunicata interamente al corpo B.

Fig. 165. III. Se finalmente il corpo B fosse totalmente fisso ed immobile, ovvero infinitamente maggiore del percuziente A, doverà il mobile A ritornare indietro, come riflesso da esso corpo B per la direzione IQ, che farà l'angolo QIS di tal riflessione, eguale all'angolo dell'incidenza AIR; Imperocchè tornando indietro colla velocità IM eguale alla velocità MI perpendicolare alla superficie di esso B, in cui ha urtato il mobile A, e seguendo a muoversi colla velocità MQ eguale ad AM, che prima aveva nella direzione parallela alla lunghezza RS di esso corpo B, dunque farà la direzione IQ eguale alla prima AI, essendo i triangoli rettangoli AMI, QMI simili ed eguali, onde l'angolo MAI è eguale ad MQI, e gli alterni delle parallele AIR, QIS parimente devono essere eguali, onde l'angolo dell'incidenza è eguale all'angolo della riflessione.

PRO-

PROPOSIZIONE L.

Se due pesi A *e* B *siano connessi con una verga, o linea rigida* A B *posta orizzontalmente, cadendo parallela a se stessa, farà maggior percossa in un ostacolo* E, *col punto* C, *centro di gravità di essi pesi, che con qualunque altro punto* D: *ma se si muovesse circolarmente intorno ad un punto* H *fuori del sito d'ambidue i pesi, la maggior percossa parimente si farebbe in un tal punto* C, *che sia il centro de' momenti con cui si muovono tali pesi.*

Fig. 165. 167. 168.

IMperocchè ricevendo il sostegno *E* l'incontro della verga *AB* nel centro *C* di essi pesi, quando cade parallela a se stessa, si troverà aggravato da ambidue i momenti eguali di tali pesi, di cui non può prevalere l'uno all'altro, e però dovrà sostenergli, laddove se vi cadesse nell'altro punto *D*, posto tra il centro *C* ed uno di essi pesi *B*, comecchè sarà minore il momento del peso *B* dalla distanza *BD* che dalla *BC*, ed il momento di *A* divenendo maggiore dalla distanza *AD* che non era dalla *AC*, dividendosi *A* nelle parti *F*, *X*, delle quali stia *F* a *B* come *BD* a *DA*, riuscendo *D* solamente il centro de' pesi *B*, *F*, questi si equilibreranno nel sostegno *E*, cadendovi col punto *D*, ma l'altra porzione *X* coll'eccesso del momento di *A* sopra quello di *B* seguirà a cadere, rivoltando essa verga, e però ne riuscirà minore percossa all'ostacolo *E*, di quella che soffrirebbe ricevendo essa verga nel punto *C*, unico centro de' pesi *A*, *B*, da' quali sarà totalmente aggravato.

Ma movendosi essa verga intorno al punto *H*, co-

come centro del moto, non averanno essi pesi la stessa velocità, ma sarà quella di A a quella di B, in ragione delle distanze AH, BH, e però il momento di A al momento di B, essendo in ragione composta di A a B, e di HA ad HB, dividendosi così la AB nel punto C di maniera che, sia BC a CA come il momento di A al momento di B, ed urtandosi il sostegno E da essa verga nel punto C, gli farà tale percossa, come se due pesi G, K proporzionali a que' momenti, e congiunti colla linea rigida GK, urtassero in E, cadendo parallelamente essa verga, col punto L, centro de' loro pesi, da cui è divisa GK nella stessa ragione, come era divisa AB nel centro de' momenti A, e B, però siccome questa verga GK dovrebbe fare nel punto L maggior percossa, che in un altro punto, così ancora la maggiore percossa della verga AB, mossa all'intorno al punto H, seguirà dall'urto del suddetto punto C centro di quei momenti. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se la figura piana, o solida $DFHIE$, cade sopra un ostacolo con moto parallelo alla sua lunghezza, similmente farà maggior percossa, urtando dirimpetto al centro di gravità di essa figura; ma se si movesse d'intorno ad un punto H, descrivendo la figura $HMNB$, le cui ordinate AM, BN sieno proporzionali a'momenti delle sezioni di quel mobile (la quale dirassi la scala de' momenti loro) e trovato in questa figura il centro di gravità G, condotta GC perpendicolare alla lunghezza del mobile BH, sarà nel punto C il luogo in cui farà la

Fig. 169.

mag-

maggior percossa, movendosi circolarmente dal termine H, che in qualsivoglia altro punto. Fig. 170.

II. Un regolo, o bastone cilindrico HA, egualmente grosso in tutte le sue parti, girando dal termine H, farà la maggior percossa nel punto C lontano dal termine A per un terzo di sua lunghezza, perchè la scala de' momenti delle sue parti sarebbe un triangolo HAM, essendo le sezioni tra loro eguali, e le velocità proporzionali alle distanze dal centro del moto, e però i detti momenti di A e B sono come le ordinate AM, BN di questo triangolo, il cui centro di gravità G è distante dalla base per un terzo di sua lunghezza.

CAPITOLO IX.

De' Pendoli.

PROPOSIZIONE LI.

Se due Pendoli CG, OF *si rimovono ad angoli eguali* GCA, FOD *da' loro perpendicoli, indi si lascino ricadere, saranno i tempi delle oscillazioni per gli archi simili* ABG, DEF *in ragione subduplicata de' raggi* CA, OD. Fig. 171. 172.

Si prendano in essi due archetti infinitamente piccoli tra di loro simili AH, DI, ed altri due archetti simili HB, IE, congiunte le rette AH, DI, e le altre due HB, IE, le quali concorrano con le orizzontali AK, DL in K, ed L. E' manifesto

feſto, eſſer ſimili i due triangoli *ACH*, *DOI*, e gli altri due *BCH*, *IOE*, ſiccome ancora i due *AKH*, *DLI*, avendo i loro lati omologhi paralleli: dunque i tempi della caduta per la corda *AH*, e per l'altra *DI* egualmente inclinata, ſono in ſubduplicata ragione di *AH* a *DI*, e però in ragione ſubduplicata di *CA* ad *OD*, e ſimilmente in tale ragione ſarebbe il tempo per *KH* al tempo per *LI*, o il tempo per tutta la *KB* al tempo per tutta l' *LE* dunque ancora il tempo per la rimanente *HB* al tempo per la rimanente *IE*, dopo la diſceſa di *HA*, e di *ID*, è ſempre nella ſteſſa ragione, o foſſe fatto il moto per le rette *KH*, *LI*, o per l'altre *AH*, *DI*, eſſendo la ſteſſa velocità acquiſtata tanto per *KH*, che per *AH*, con cui s'inoltra il mobile per *HB*: ed altresì la medeſima velocità acquiſtata per *LI*, che per *DI*, con cui proſeguirebbe il moto per *IE*, onde diviſi gli archi ancora rimanenti *BG*, *EF* in altri archetti ſimili, le corde de' quali ſarebbero in queſto, e in quello poligoni ſimili inſcritti in detti archi, e per la loro minima piccolezza convenienti con detti archi, è chiaro, che il tempo per tutte le corde inſcritte nell' arco *AG*, al tempo per altrettante inſcritte nell' arco *DF*, ſarà in ragione ſubduplicata del raggio *CA* al raggio *OD*, e però ancora i tempi delle oſcillazioni di queſti pendoli per gli archi ſimili ſono in detta ragione. Il che &c.

COROLLARI.

I. Quindi le lunghezze de' pendoli ſono come i quadrati de' tempi, per cui fanno archi ſimili, ed i tempi di tali oſcillazioni ſono come le radi-

ci

ci quadrate di esse lunghezze: così il tempo della oscillazione d'una lampada pendente per una corda di sedici braccia, al tempo con cui un altra lunga nove braccia fa simile oscillazione, starà come quattro a tre, che sono le radici quadrate di sedici, e nove.

II. Il numero delle oscillazioni eguali fatte in un dato tempo da qualche pendolo, al numero di eguali vibrazioni fatte da un altro pendolo nello stesso tempo, saranno reciprocamente come il tempo di una vibrazione per detto pendolo, al tempo di una vibrazione simile del primo: così se il pendolo di sedici braccia facesse in un minuto primo vibrazioni 21. quell' altro di braccia nove ne farebbe nello stesso tempo 28. essendo 28. a 21. come 4. a 3. cioè come il tempo della vibrazione del pendolo di sedici braccia, al tempo di una vibrazione del pendolo di nove braccia.

III. Quindi dal numero delle vibrazioni d'una Lampada sospesa dalla volta d'una Chiesa, per piccoli archetti simili insegnò il Galileo potersi ritrovare l'altezza di essa; Imperocchè se si avesse un pendolo d'un braccio e quattro quinti, la cui vibrazione si fa in un secondo minuto, sarebbe questo in un minuto primo sessanta vibrazioni, però se si vedesse nello stesso tempo di un minuto primo fare la lampada solamente dodici vibrazioni, si dovrebbe inferire, essere l'altezza di detta lampada connessa colla sua fune alla volta per un intervallo di braccia quarantacinque, essendo sessanta a dodici, come cinque ad uno, onde il tempo d'una vibrazione della lampada, al tempo di una simil vibrazione del pendolo piccolo, sarà in simil

ra-

ragione di 5. ad 1. che è ragione fubduplicata di effe lunghezze, di cui farà quella venticinque volte maggiore di quefta, come è il quarantacinque refpettivamente all' uno con quattro quinti.

PROPOSIZIONE LII.

Fig. 173.

Movendofi il pendolo C A *per qualunque arco del quadrante* G B A, *le forze, con cui fi muove in qualunque fito, fono come i feni degli angoli fatti col perpendicolo dal pefto di effo pendolo follevato, e le forze centrifughe foftenute dal fiffo punto* C, *intorno a cui fi muove, fono come i feni degli angoli, che fa l' inclinazione di effo pendolo con l' orizzonte* C G.

IMperocchè giunto il pendolo in qualunque fito GB, e condotta la tangente BE dell' arco fino all' orizzontale CG, fi tiri ancora la DH perpendicolare al raggio CB, che farà parallela alla tangente BE: è manifefto, che la forza, con cui fi muove il pefo di effo pendolo nel fito B dell' arco, è quella che averebbe nel piano inclinato BE, che tocca effo arco, dunque fta quefta forza alla fua gravità affoluta, che averebbe nel perpendicolo, come DB a BE, o come CD (che è eguale a BF) al raggio CB, effendo quefte rette proporzionali, dunque in qualunque fito fi trovi effo pendolo, farà la forza, con cui fi muove, alla gravità affoluta, come BF feno dell' angolo BCA al raggio CB, e la gravità affoluta ftarebbe alla forza, con cui fi moveffe il globo per qualunque altro punto dell' arco, fimilmente come il raggio, al feno di quell' angolo, che farebbe il pendolo colla perpendicolare

lare medeſima CA, dunque le forze, con cui ſi muove eſſo globo in più ſiti dell'arco, ſono come i ſeni di detti angoli fatti col perpendicolo, ſecondo la ſituazione del pendolo. Eſſendo poi ancora CD a CB, come DH a DB, sarà quella forza, con cui ſi muove il peſo alla ſua gravità aſſoluta, con cui ſi moverebbe nel perpendicolo, come DH a DB, però eſſa gravità aſſoluta eſpreſſa per DB riſolvendoſi nelle due forze DH, HB, di cui quella ſi pratica nel ſito B per l'inclinazione della tangente BE parallela a DH, sarà l'altra forza rimanente HB quella forza centrifuga, con cui eſſo peſo contende di ritirarſi per la direzione AB dal centro C, il quale con egual forza oppoſta deve ritenerlo, dunque ſta ancora la gravità aſſoluta del peſo, alla forza centrifuga di eſſo nel ſito B, come DB a BH, cioè come il raggio CB al ſeno DB dell'angolo fatto da eſſo pendolo coll' orizzontale CG, ed in qualunque ſito ciò eſſendo, saranno ſempre le forze centrifughe, come i ſeni degli angoli che fa il pendolo in qualunque poſto coll'orizzonte. Il chè &c.

COROLLARI.

I. Alzando ſopra i punti dell'arco ABG le rette eguali a' detti ſeni BF, corriſpondenti agli angoli fatti dal pendolo col perpendicolo in qualunque ſito, ne riuſcirà la ſcala delle forze, con cui ſi muove ne' detti punti il globo attaccato al pendolo nelle ſue vibrazioni, la qual figura sarebbe l'ungula tagliata dalla ſuperficie cilindrica per un piano inclinato ad angolo ſemiretto, di cui è nota la quadratura.

II.

II. Le forze centrifughe, essendo come i seni *BD*, o come le distanze *CF* dall'orizzonte, saranno in subduplicata ragione delle velocità acquistate per la caduta di tutto il quadrante *GBA*; Imperocchè la velocità in *B* sarebbe la medesima che quella si acquisterebbe per la discesa *CF*, e la velocità acquistata per tutto l'arco *GBA* sarebbe come quella che si acquisterebbe colla caduta *CA*, le quali velocità sono in subduplicata ragione di *CF* a *CA*, e però essendo la forza centrifuga in *B* a quella in *A*, come *DB*, ovvero *CF* a *CA*, sono in subduplicata ragione delle velocità ivi acquistate.

III. Caduto il globo per tutto il quadrante *GBA* parmi, che dovrà tirare il centro *C* doppiamente di quando gli era attaccato fermo, perchè ivi lo tirava solamente colla sua gravità assoluta, ma dopo quella discesa, vi si trova ancora la forza centrifuga, che è come il raggio *CA*, siccome la gravità assoluta era proporzionale al medesimo raggio.

PROPOSIZIONE LIII.

Se il filo d' un pendolo CD *voltandosi d' intorno alla Cicloide* CNA *descritta dal cerchio* AGB, *il cui diametro* AB *sia la metà di esso filo, farà la vibrazione* AMD, *scostandosi da quella curva, e ritornando perpendicolare all' orizzonte, sarà la curva dal peso* D *descritta, simile, ed eguale a detta Cicloide.*

Fig. 174.

ORdinata *EN* parallela alla base *BC*, e tiratane un'altra infinitamente prossima *YO* si condu-

ducano le corde AK, ed AG, questa segante la YK in L, e tirate OP, KH, LF, parallele ad AB, e col centro A descritto l'arco circolare KI, intendasi per lo punto N passare il cerchio VNQ nel sito in cui descrive l'arco della Cicloide AON. E' manifesto, che l'ordinata EN è eguale alla somma dell'arco circolare AG, e del seno GE, imperocchè rivoltatosi il semicircolo BGA sopra la retta BC, con la quale rivoluzione il vertice A, descrivendo la curva, è venuto in N, e quando fosse arrivato in C, dove finisce la curva ANC, si sarà adattata tutta la semicirconferenza BGA alla base BC, la quale gli sarà eguale, dunque essendo il cerchio nel detto sito VNQ, dovrà essere l'arco Vb eguale alla retta BV, ed il rimanente arco VN eguale al resto della base VC, però essendo XN, eguale al seno EG, e la retta EX eguale a BV, cioè all'arco Vb, che pure è eguale all'arco corrispondente QN, ovvero ad AG, perciò sarà tutta l'ordinata EN, eguale alla somma dell'arco AG, e del seno GE, e così ancora l'altra ordinata YO, sarà eguale alla somma dell'arco AK, e del seno KY: quindi PN differenza delle ordinate EN, YO, sarà eguale alla somma di GK, differenza degli archi, e della GH, differenza de' seni corrispondenti: onde essendo GK eguale a KL, come la tangente KR eguaglia la tangente AR del circolo, ed essa KL essendo eguale ad FH, sarà dunque PN eguale a GF, che è la somma della differenza de' seni GH, e della HF, differenza degli archi eguale a GK, ed essendo ancora OP eguale, e parallela ad LF, sarà GL parallela, ed eguale ad NO, onde la tangente del-

la Cicloide NQ, sarà eguale, e parallela alla corda GA; e perchè nel triangolo GKL isoscele l'arco KI è perpendicolare alla base GL, la divide per mezzo, però NO eguale a GL è doppia di GI differenza delle corde AG, AK, onde la porzione della curva AN deve esser doppia della corda AG, e tutta la curva ANC doppia del diametro AB, come si suppone essere il filo CD, il quale però complicandosi con essa curva ad esso eguale, si combagerà totalmente con la medesima, e quindi poi distraendosi in qualunque parte dell' oscillazione AM, sarà nel sito MN tangente di essa curva, alla cui parte AN essendo eguale MN, parte del filo scostatosi da essa, riuscirà MN doppia di NQ, e condotta MS perpendicolare ad MQ concorrente col diametro del cerchio VQ in S, sarà il triangolo QMS eguale al triangolo QNV, essendo MQ eguale a QN, e l'angolo MQS eguale all'altro NQV, e gli angoli in M, ed in N retti, però il semicircolo descritto intorno l'angolo QMS sarà eguale all' altro semicircolo QNV, e l'arco QM essendo eguale all' arco QN, ed ancora all' arco AG, siccome l' arco AG eguaglia la retta GN, la quale è eguale alla retta AQ, sarà l'arco del semicircolo QM eguale ad essa AQ, e però il punto M sarà nella Cicloide descritta sopra la retta AZ dal medesimo circolo; dunque esso pendolo CD descriverà la curva AMD, eguale alla Cicloide ANC, a cui era applicato. Il che &c.

COROLLARIO.

Se saranno due Cicloidi eguali CNA, CT, il pendolo CD nella sua vibrazione descriverà intera

ra la Cicloide, o qualche parte di essa, secondo che sarà applicato, o a tutta la Cicloide ANC, o alla sola porzione NC di essa.

PROPOSIZIONE LIV.

Lo stesso pendolo interposto alle curve Cicloidali CNA, CT, *qualunque vibrazione faccia, o per tutta la curva* AMD, *o per la sola parte di essa* MD, *si farà sempre in tempo eguale.*

Tavola XVIII. Fig. 175.

SI tiri l' ordinata MP segante il cerchio genitore in K, ed il diametro in P, e tirata qualunque altra ordinata FR segante il cerchio in I, condotte le corde DK, DI, si faccia come DK a DI, così il diametro DZ ad un altra corda del cerchio DH, e per lo punto H si tiri un'altra ordinata BHO; essendosi dunque dimostrato, che le porzioni della curva Cicloidale prese dal vertice sono il doppio delle corde corrispondenti nel cerchio, siccome sta DK a DI, come DZ a DH, così pure starà DM a DF, come DA a DB, e permutando DM a DA, come DF a DB: onde presa una porzione FG infinitamente piccola della curva DF, se si farà come DM a DA, così DG a DE, queste pure saranno come DF a DB, e la rimanente FG alla rimanente BE sarà nella stessa proporzione: onde saranno parti infinitesime proporzionali, e però simili alle intiere DF, DB, ed alle DM, DA: essendo poi i quadrati delle corde DK, DI, DZ, DH proporzionali alle rette DP, DR, DZ, DO, perchè moltiplicate tutte nel diametro DZ, fanno rettangoli eguali a' detti qua-

I 2 drati

drati, secondo che saranno proporzionali i quadrati *DK*, *DI*, *DZ*, *DH*, sarà pure *DP* a *DR*, come *DZ* a *DO*, e la rimanente *PR* alla rimanente *OZ* sarà nella stessa proporzione degli antecedènti *DP*, *DZ*, cioè in ragione duplicata della *DK* alla *DZ*, che è quella de' loro quadrati, o dicasi in ragione duplicata dalla curva *DM* alla *DA*, o della infinitesima *FG* alla infinitesima *BE*; ma la ragione delle altezze *PR*, *ZO* è pure duplicata delle velocità concepute nelle discese per *MF*, e per *AB*, dunque gli spazi *FG*, *BE* essendo proporzionali alle velocità concepute per tali discese, dovranno farsi nel medesimo tempo, il che sempre accadendo, ed essendo altrettante le infinitesime parti *FG* in *DM*, che le infinitesime *BE* in *DA*, si dovrà fare nel medesimo tempo la vibrazione *MD*, come tutta la *AD* cominciata quella dalla quiete in *M*, e questa dalla quiete in *A*, però qualunque vibrazione fatta dal pendolo interposto fra le Cicloidi *CN*, *CT*, dirassi isocrona, cioè di tempo eguale.

COROLLARIO.

Quindi è manifesto, che le vibrazioni fatte circolarmente da un pendolo libero non sono eguali, facendosi ora per un arco più ampio, ora per uno più piccolo, anzi devono farsi più tardi le oscillazioni maggiori, che le minori, perchè, se applicandosi il filo alla Cicloide fa nello stesso tempo l' arco *AMD*, che il solo arco più stretto *MD*, la discesa per le parti più alte *AB*, *AM* facendosi con più corta lunghezza del filo tangente la superiore Cicloide in *V*, ed in *N*, deve fare queste

parti

parti più presto, che se liberamente il filo intero si vibrasse, descrivendo un quarto di circolo, perchè nelle parti superiori di esso più tardi si muoverebbe, che per le parti *AM*, *AB* della Cicloide co' fili più corti *NM*, *VB*; onde Cristiano Ugenio esattamente fece inserire il pendolo dell'Orologio tra due porzioni Cicloidali, acciò riescano isocrone le oscillazioni regolari da essi fatte, o per arco più ampio, o più angusto.

PROPOSIZIONE LV.

Il tempo di qualunque oscillazione FDG, *ovvero dell'intera* ADV, *fatta dal pendolo* CD *interposto alle curve Cicloidali* CN, CT *sta al tempo della caduta per l'asse di essa Cicloide* ZD, *che è la metà del filo* CD, *come la Periferia del circolo al suo diametro.* Fig. 176.

SI tirino due ordinate infinitamente prossime *BO*, *MP* seganti la periferia del circolo genitore ne' punti *H*, *K*, e condotta la tangente del cerchio *HR*, si tirino le corde *ZH*, *DHS*, la quale prolungata sega in *S* la base della Cicloide *AV*, e conviene in *L* con la seconda ordinata *MP*. Supponendo, che un mobile con la velocità acquistata dalla caduta *CD*, si muovesse equabilmente per la circonferenza *DXZH*, sarebbe il tempo per *HK* al tempo della discesa per *BM* del pendolo, che descrivesse la curva *AMDV*, in ragione composta della diretta degli spazi *HK*, *BM*, e della reciproca delle velocità adoperate in *B*, ed in *H*, ma la prima ragione è quella di *HK* ad *HL*, (essendo *HL* eguale a *BM*) cioè di *HR* ad *HS*, la seconda

da poi, è di HZ a ZD, ovvero di HS ad SZ, dunque il tempo per HK al tempo per BM. sta come HR, o come la sua eguale RZ ad SZ. cioè in ragione subdupla, quale è quella appunto della ZD alla CD: dunque convertendo il tempo per tutta la oscillazione per la curva ADV, al tempo del moto equabile per tutta la circonferenza $DXZHD$ è come CD a DZ: ma il tempo del moto equabile per la circonferenza, al tempo del moto equabile per CD colla stessa velocità ottenuta nella caduta ZD, il qual tempo sarebbe il medesimo di tale caduta, starebbe come la circonferenza suddetta alla lunghezza del filo CD, dunque per l'egualità perturbata, il tempo per la oscillazione ADV al tempo per la caduta nel perpendicolo ZD, è come la circonferenza $DXZHD$ al suo diametro ZD, e così può dirsi ancora del tempo di qualunque altra minor vibrazione BDG, essendo tutte contemporanee.

COROLLARI.

I. Le lunghezze de' pendoli saranno in duplicata ragione de' tempi delle loro vibrazioni, essendo ancora le metà delle loro lunghezze, come i quadrati de' tempi delle discese perpendicolari per tali metà, ed i tempi di tali discese a' tempi delle vibrazioni de' pendoli intieri, nella medesima ragione del diametro alla periferìa circolare.

II. Se nello stesso tempo, in cui il pendolo fa una vibrazione, cadesse un grave perpendicolare, sarebbe lo spazio fatto da questo alla metà della lunghezza di quel pendolo, come il quadrato della perifería circolare al quadrato del diametro, essen-

essendo gli spazi fatti perpendicolarmente cadendo in ragione duplicata de' tempi, onde siccome un pendolo negli Orologj Astronomici fa qualunque vibrazione in un minuto secondo con la lunghezza di tre piedi, e otto linee della misura di Parigi, dovrà un mobile cadere perpendicolarmente in un minuto secondo per quindici piedi di Parigi, ed un'oncia in circa, essendo tal lunghezza a quella della metà di esso pendolo, come il quadrato della periferia circolare al quadrato del suo diametro.

PROPOSIZIONE LVI.

Se due pesi A, B *sono congiunti in un pendolo con un filo, o verga inflessibile* CB, *il punto* D *della maggior percossa assegnato nella Proposizione* 50. *sarà il centro d'oscillazione, di manierachè nello stesso tempo dovrà vibrarsi esso pendolo* CBA *come un pendolo della lunghezza* CD, *che avesse nello stesso punto* D *uniti i pesi medesimi.* Fig. 177.

IMperocchè essendo in D il centro del momento de' pesi A, B, lo stesso ivi sarebbe se fossero ambidue i pesi in esso punto D raccolti, e però nell'uno, e nell'altro caso dovrà farsi una simile, ed eguale vibrazione da tali pendoli. Il che &c.

COROLLARI.

I. Si trova adunque il centro d'oscillazione, con dividere la distanza de' pesi A, B in D reciprocamente in ragione de' loro momenti, cioè in maniera, che stia AD, a DB nella ragione composta de' pesi, e delle loro velocità, cioè di B ad A, e

di BC ad AC, essendo tali distanze dal centro del moto C, in ragione delle loro velocità; e se fossero essi pesi tra loro eguali, essendo i loro momenti solamente in proporzione delle loro velocità, basterà, che si faccia AD a DB, come BC a CA, che così sarà D il centro de' loro momenti, e della loro oscillazione.

II. Essendo ancora un solo peso GF sferico, o cilindrico appeso al filo, non dovrà misurarsi la lunghezza del pendolo solamente dal suo centro di gravità E al centro del moto C, ma diviso esso mobile in due parti eguali $IFII$, HGI, i cui centri di gravità siano in A, e in B, dovrà farsi come BC ad AC, così AD a DB, e sarà il punto D il centro d' oscillazione, e però dovrà prendersi CD, e non CE per la lunghezza di esso pendolo.

Fig. 178.

III. Anzi non essendo il filo stesso privo di gravità, ma bensì un regolo, o una lama di ferro, o di ottone, converrà pure far conto di tal peso, e computandolo col peso del mobile trovarne il centro del momento, per determinarne il centro d' oscillazione, e la vera lunghezza di esso pendolo.

IV. Movendosi qualunque solido CIH dal suo vertice C, come un pendolo, ritrovatone il sito del punto D in cui sarebbe la massima percossa, come si è insegnato nella Proposizione 50. sarà esso D il centro delle oscillazioni: onde per il Corollario 2. di detta Proposizione 50. se il solido sarà egualmente grosso da per tutto, come un Prisma, un Cilindro, un Parallepipedo, sarà CD due terzi di sua lunghezza CG, essendo detto centro D distante un terzo dalla base IH, come il centro di gravità di un triangolo, che sarebbe la scala de' mo-

Fig. 179. 180.

Fig. 179.

momenti delle ſezioni di eſſo cilindro;e ſe *CIH* foſſe una piramide, ovvero un cono, ſarebbe *CD* quattro quinti della lunghezza intera *CG*, come il centro d'equilibrio in un trilineo della parabola cubica, la quale ſarebbe la ſcala de' momenti di quel ſolido piramidale, ovvero conico. Fig. 180.

CAPITOLO X.

Della reſiſtenza de' ſolidi.

DEFINIZIONI.

I. LA reſiſtenza de' ſolidi aſſoluta diceſi quella forza, con cui reſiſtono alla diviſione delle loro parti, tratte direttamente da una potenza, che con direzione perpendicolare alla ſezione da farſi, cerca di ſeparare eſſe parti.

II. La reſiſtenza reſpettiva è quella forza, con cui reſiſte alla direzione di eſſe parti ſopra il ſoſtegno, tratte da quella potenza, che con direzione, o parallela alla baſe, o inclinata ad eſſa obliquamente, cerca di ſtrappare eſſo ſolido dalla linea, ſopra di cui è retto.

SUPPOSIZIONE.

Qualunque ſia la forza con cui ſono coerenti le parti del ſolido, e reſiſtono alla loro ſeparazione, eſſendo egualmente diffuſa in qualunque ſito di tali parti omogenee, ſiccome da per tutto vi è gravità eguale, può concepirſi ancora la forza di tali re-

resistenze, come raccolta nel centro di gravità di qualunque sezione, cui sta applicata per impedirne la rottura nel medesimo piano: e perchè dipende la resistenza assoluta dalla quantità delle fibre, di cui le sezioni sono composte, e connettono una parte con l'altra, perciò in diverse sezioni del medesimo solido, o di due solidi composti della medesima materia, possono supporsi le loro resistenze assolute proporzionali a quelle sezioni medesime, in cui stanno per impedirne la divisione.

PROPOSIZIONE LVII.

Fig. 181.

Di qualunque solido EBFL, *fisso per esempio nel muro sopra il sostegno* EF *colla sezione* EBF, *il cui centro di gravità* C, *sarà la resistenza assoluta alla resistenza respettiva di esso, come la lunghezza* DL, *con cui si sporge oltre il sostegno, se è perpendicolare alla direzione del peso* LG, *che cerca di separarlo, o come la perpendicolare* DL *condotta dal sostegno alla detta direzione, alla distanza* CD, *del centro di essa sezione dal medesimo sostegno.*

Sia *H* la potenza, che tirando il solido per la direzione *CA* perpendicolare alla base *EBF*, eguagli appunto la resistenza assoluta di esso, di manierachè accresciuta di qualunque minimo peso potesse vincerla, e separare il solido da detta base: sia ancora la potenza *G* applicata nell'estremo termine *L*, la quale tirando il solido con la direzione *LG*, cui sia perpendicolare *DL*; ne eguagli la resistenza respettiva, di manierachè se vi si aggiungesse qualche minimo peso, potesse rom-

pere

pere il solido sopra il sostegno *EF*, e vincerne la resistenza respettiva. Sarà dunque il momento di *G* eguale al momento di *H*, potendo l' una, e l' altra rompere il medesimo corpo nella stessa sezione: dunque sarà eguale il momento della potenza *G*, al momento della resistenza assoluta, che si concepisce nel centro *C*, e però nel vette istesso *CDL*, sarà la resistenza assoluta, posta in *C*, alla resistenza respettiva eguale al peso *G*, posto in *L*, come reciprocamente *DL* a *CD*, per essere i loro momenti eguali. Il che &c.

COROLLARI.

I. Ciò vale in qualunque specie di solidi, o siano d'uniforme grossezza, o si vadino assottigliando, o ingrossando nelle sezioni parallele alla base, purchè si astragga dal peso del medesimo solido, e solo si attenda per ora la di lui lunghezza, e la qualità della base infissa nel muro, e non le altre sezioni le quali non accrescono nè diminuiscono la facilità della divisione del solido da essa base.

II. Se le basi de' solidi egualmente lunghi *EBFL*, *IBKL* averanno lo stesso centro di gravità *C*, saranno le loro resistenze respettive, siccome ancora le resistenze assolute, proporzionali alle loro basi; Imperocchè essendo le resistenze assolute del primo solido, e del secondo, come le potenze *H*, *M* pronte a dividerlo, e le resistenze loro respettive *G*, *N* pronte a strapparlo sopr' al sostegno, siccome tanto *H* a *G* è come *DL* a *DC*, quanto ancora *M* ad *N* sarebbe nella stessa ragione di *DL* a *DC*, dunque ancora permutando *H* ad *M*, sta come *G* ad *N*, e però le resistenze asso-

Fig. 182.

solute di questi solidi proporzionali a quelle basi, sono ancora come le resistenze respettive GN, le quali però sono proporzionali a dette basi.

Fig. 183. III. Le resistenze respettive de' solidi di diversa lunghezza DL, DP su la medesima base EBF, saranno reciproche alle dette lunghezze, perchè se G eguaglia la resistenza del solido più corto, ed H quella del più lungo, sarà G alla resistenza assoluta della base comune, come CD a DL, e questa resistenza sarà al peso H, come PD a CD; dunque per l'ugualità perturbata, G ad H, è come DP a DL.

Fig. 184. IV. Se fossero basi eguali, i cui centri di gravità C, ed I siano diversamente lontani dal sostegno, sarà la resistenza del solido, su la base FEB alla resistenza assoluta del medesimo, come CD alla sua lunghezza DL, e la resistenza respettiva dell'altro solido sopra la base RST nella medesima lunghezza, sarà alla sua resistenza assoluta, come ID a DL, e però la resistenza respettiva del primo a quella del secondo, è come CD a DI, che sono le distanze de' loro centri dal sostegno.

V. E però lo stesso solido, la cui base si disponga in diverso sito, ove abbia il centro di gravità più lontano, o più vicino al sostegno, averà la resistenza respettiva, ivi maggiore, ivi minore nella proporzione delle distanze centrali.

Fig. 185. VI. La canna vota la cui base è l'armilla $IKFG$, ha maggior resistenza respettiva, che un cilindro egualmente lungo, il cui cerchio fosse eguale alla detta armilla, cioè il cui raggio CD sia eguale alla perpendicolare GH, condotta dal termine della canna interiore G, sopra il diametro; Imperocchè

la

la diſtanza del centro di gravità della canna *EF*, eguale al raggio *EH*, è maggiore della diſtanza centrale *CD*, eguale alla perpendicolare *GH*.

PROPOSIZIONE LVIII.

Ne' diverſi ſolidi EBFL, TVRO *la reſiſtenza reſpettiva del primo a quella del ſecondo, è in ragione compoſta di quella delle baſi* EBF, TVR, *e delle diſtanze centrali* CD, IS, *e della reciproca delle loro lunghezze* SO, DL.

Fig. 186. 187.

IL peſo *G* eguagli la reſiſtenza reſpettiva del primo ſolido, ed il peſo *N* quella del ſecondo: ſarà *G* alla reſiſtenza aſſoluta del primo, come *CD* a *DL*, e la reſiſtenza aſſoluta del primo a quella del ſecondo, è come la baſe *EBF* alla baſe *TVR*, e queſta reſiſtenza aſſoluta del ſecondo al peſo *N*, come *SO* ad *IS*, dunque la ragione di *G* ad *N*, cioè della reſiſtenza reſpettiva del primo ſolido a quella del ſecondo, ha gli antecedenti *EBF, CD, SO*, ed i conſeguenti *TVR, IS, DL*, dunque è in ragione compoſta di quella delle baſi, e delle diſtanze centrali direttamente, e reciprocamente della lunghezza di tali ſolidi. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se le ſezioni de' ſolidi ſono triangoli, o rettangoli, o parabole, in cui le diſtanze del centro di gravità dalla baſe ſono proporzionali alle loro altezze, la proporzione compoſta della ragione delle ſezioni, e delle diſtanze centrali, potrà dirſi compoſta delle loro baſi, e de' quadrati delle loro altezze, ed eſſendo ancora ſimili le figure di eſſe

ſe-

sezioni, essendo ancora la ragione delle basi, eguale a quella delle altezze, sarà la stessa ragione composta delle sezioni, e delle distanze centrali, triplicata di quella delle altezze, onde potrà dirsi, che la resistenza respettiva nell' una, alla resistenza respettiva nell' altra, sia in ragione compostà di quella de' cubi dell' altezze di tali sezioni simili, e della reciproca delle lunghezze de' loro solidi.

II. E se fossero ancora i corpi solidi simili, le cui lunghezze sarebbero proporzionali alle altezze delle sezioni simili, la ragione reciproca delle lunghezze diminuirà la triplicata delle altezze, cioè de' loro cubi, onde rimarrà la ragione delle resistenze respettive ne' corpi simili puramente duplicata dalle altezze, o di altri omologhi lati delle sezioni, cioè come i quadrati di tali linee.

III. Se fossero ne' due solidi le lunghezze proporzionali al prodotto delle sezioni, e delle distanze centrali, sarebbero le resistenze respettive eguali nell' uno, e nell' altro solido, perchè le ragioni eguali reciproche compongono la proporzione di egualità; Ed ancora ne' solidi egualmente lunghi, se fossero le sezioni reciproche delle distanze centrali, oppure le basi reciproche de' quadrati delle altezze, quando le sezioni fossero parallelogrammi, o triangoli, o parabole di qualunque genere, sarebbero pure le loro resistenze eguali.

PROPOSIZIONE LIX.

Descrivere vari solidi, che fissi nel muro in qualunque delle loro parallele sezioni, mantengono sempre egual resistenza respettiva, quantunque la loro lunghezza, ora maggiore riesca, ora minore, purchè non si computi il loro peso. Pre-

PResa qualunque figura piana $ABDF$ posta orizzontalmente, si aggiunga allo stesso asse AF un' altra figura verticale $ARHF$, in cui sia il quadrato dell' ordinata AR al quadrato di qualunque ordinata GH, in ragione composta di AF ad FG, e della reciproca delle ordinate DG, AB in cotesta figura: oppure, data la figura verticale $ARHF$, si descriva l' altra orizzontale $ABDF$, in cui l' ordinata AB all' ordinata GD sia in ragione composta di AF, ad FG, e reciprocamente de' quadrati GH, AR delle ordinate dell' altra verticale; Se si moltiplicherà la figura orizzontale nella verticale, compiendosi i rettangoli delle ordinate $BARC$, $DGHE$, ne riuscirà un solido, che in qualunque di tali sezioni fisso nel muro, averà egual resistenza respettiva: imperocchè essendo il prodotto della sezione rettangola $BARC$ nella sua distanza centrale dal sostegno, al prodotto dell' altra sezione rettangola $DGHE$ nella sua distanza centrale, che averebbe nel sostegno GD, in ragione composta del quadrato AR al quadrato GH, e della larghezza AB alla larghezza GD (per il Corollario 1. della Proposizione precedente) ed essendo il quadrato AR al quadrato GH in ragione composta di AF ad FG, e di GD ad AB, dunque la lunghezza AF alla lunghezza GF, sarà in ragione composta de' quadrati AR, GH, e di AB a GD, e però saranno tali lunghezze proporzionali a' prodotti delle sezioni nelle distanze loro centrali, onde le resistenze respettive saranno eguali nell' uno, e nell' altro sito, per il Coroll. 3. della Proposizione precedente.

Tavola XIX. Fig. 188.

Co-

COROLLARI.

Fig. 189. I. Quindi il prisma Parabolico fatto dalla Parabola verticale *ARHF*, e dall' Orizzontale rettangolo *FAB*, è un solido, che impegnato nel muro in qualunque sua sezione *ABCR*, *GDEH*, sarà di egual resistenza, come insegnò il Galileo; Imperocchè il quadrato *AR* al quadrato *GH* essendo come *AF*, ad *FG*, ed essendo *GD* eguale ad *AB* la ragione composta di *AF* ad *FG*, e di *DG* ad *AB*, è la medesima che della sola *AF* ad *FG*, cioè de' quadrati delle ordinate *AR*, *GH* nella parabola.

II. Ancora il prisma triangolare *ABFCR*, il cui triangolo è orizzontale, ed il rettangolo verticale, avrà egual resistenza respettiva in qualunque sezione *ABCR*, *GDEH*, come indicò il Sig. Viviani; perchè essendo eguali le ordinate del rettangolo *AR*, *GH*, i loro qaadrati sono pure in ragione di *AF* ad *FG*, e di *GD* ad *AB*, che è la stessa di *GF* ad *AF*, onde è ragione di egualità.

Fig. 190.

Fig. 191. III. Una Conoide fatta dalla parabola cubica *FDBA* girata intorno all' asse *AF*, oppure qualunque solido fatto da essa con quadrati, o altre simili figure *ABCR*, *GDEH*, descritte dalle sue ordinate, sarà un corpo di egual resistenza nelle sue sezioni, o circolari, o quadrate, o triangolari &c. fisse nel muro, perchè essendo la figura verticale *ARHF* eguale, o simile all' orizzontale *ABDF*, il cubo *AR* al cubo *GH*, essendo come *AF* ad *FG*, cioè come il cubo *AB* al cubo *GD*, deve essere il quadrato *AR* al quadrato *GH* in ragione composta di *AF* ad *FG*, e della reciproca di *GD* ad *AB*, per-

perchè alla triplicata di AB, e GD aggiunta questa reciproca di GD ad AB. rimane la sola duplicata di AB a GD, che è la stessa del quadrato AR al quadrato GH.

PROPOSIZIONE LX.

Se il solido BEFL *fisso nel muro eguagli la sua resistenza respettiva, di manierachè aggiuntole qualunque minimo peso debba troncarsi, sarà il suo peso alla di lui resistenza assoluta, come* CD, *distanza del centro di gravità della sezione dal sostegno* EF, *alla distanza* GC *del centro di gravità* G *di esso solido della medesima sezione.* Fig. 192.

IMperocchè congiunta DG, sarà CDG il vette inflesso, in cui dal termine G tenta di muoversi il peso del solido per la direzione GH parallela a CD, e la resistenza assoluta trattiene esso solido per la direzione GC, cui tirata la parallela DH, comecchè queste due forze hanno egual momento, dovrà stare il peso del solido alla resistenza assoluta, cui si equilibra, come CD, distanza del centro della resistenza dal sostegno alla DH, ovvero CG, distanza del peso dal medesimo sostegno. Il che &c.

COROLLARI.

I. Fra tutti i solidi simili AEL, VTO un solo può essere quello, che col proprio peso pareggi la resistenza sua respettiva, perchè essendo simili le sezioni AE, VT le loro distanze centrali sono proporzionali all'altezze, ed alle larghezze, onde il momento della resistenza in AE, a quello in Fig. 193. 194.

K VT,

VT, sarà in triplicata ragione delle altezze *BE*, *KT*: ma il momento del peso nel solido *AEL*, a quello dell'altro *VTO*, sarà in ragione quadruplicata delle stesse altezze *BE*, *KT*, per essere composta di quella de' solidi, che è triplicata di *BE* a *KT*, e delle distanze *GC*, *HI* de' loro centri di gravità da quelle basi, che sono pure proporzionali alle medesime altezze *BE*, *KT*, dunque ha maggior ragione il momento del peso del solido maggiore *AEL* al momento del minore *VTO*, che il momento della resistenza del primo alla resistenza dell'altro; onde se il momento di *AEL* pareggiasse la resistenza *AE*, il momento *VTO* sarebbe minore della resistenza *VT*, e viceversa se il momento *VTO* pareggiasse la resistenza *VT*, il momento *AEL* sarebbe maggiore della resistenza *AR*, dunque un solo de' simili solidi può uguagliare la sua resistenza respettiva.

II. Parimente un solo de' simili solidi, che tirasse direttamente col suo peso la sezione, potrà pareggiare la resistenza assoluta, essendo il peso di *AEL* a quello di *VTO*, come il cubo *AB* al cubo *KT*, ma la resistenza assoluta nella sezione *AE* a quella dell'altra *VT*, è come il quadrato *AB* al quadrato *KT*, onde se il solido maggiore eguagliasse col suo peso la resistenza assoluta, non potrebbe il minore pareggiarla, e se il minore eguagliasse la sua resistenza, dovrebbe il maggiore superarla, per essere maggiore la ragione de' pesi di quella delle resistenze.

Fig. 195.

PROPOSIZIONE LXI.

Trovare infiniti solidi, che sporgendo fuori del

muro

muro abbiano le resistenze respettive sempre proporzionali a' momenti de' loro pesi; onde se il peso di uno eguagliasse la resistenza della sua base, ancora il peso di qualunque altra sua porzione eguagli la resistenza della propria base.

POsto verticale il trilineo parabolico *CEFB*, di cui è tangente l'orizzontale *FB*, si aggiunga alla stessa *FB* in sito orizzontale il parallelogrammo *FBA*, o il tritangolo *FAB*, o qualunque parabola *FGAB* di qualsivoglia genere, indi moltiplicata una figura con l'altra ne riesca il solido *ABFCR*, sarà il momento del peso di questo al momento del peso di qualunque altra porzione *GDFEH* tagliata col piano *DH*, parallelo al piano *BR*, come il momento della resistenza *BARC* al momento dell' altra parallela sezione *DGHE*. Imperocchè quando l' orizzontale è un rettangolo *ABF*, il momento della resistenza della sezione *ABCR* a quello della resistenza *GDEH*, sarà come il quadrato *BC* al quadrato *DE*, essendo le loro centrali distanze come le altezze, e le larghezze eguali: ma il momento del peso del primo solido *ABFCR*, al momento del peso del secondo *GDFEH*, essendo in ragione composta di *BC* a *DE*, e del quadrato *BF*, al quadrato *FD*, i quali sono pure come le altezze *CB*, *DE*, dunque i momenti delle resistenze sono proporzionali a' momenti de' pesi di tali solidi; onde se il cuneo *ABFCR* col proprio peso eguaglia la resistenza respettiva della sua base *AC*, ancora il cuneo *GDFEH*, dovrà pareggiare la resistenza della sua base *GE*; e qualunque altra figura

Fig. 196. 197.

 oriz-

orizzontale moltiplicandosi col verticale trilineo parabolico, non essendo più eguale la larghezza delle sezioni AC, GE, sarà il momento della resistenza nella prima a quello nella seconda, in ragione composta del quadrato BC al quadrato DE, e della larghezza AB all' altra GD; ed essendo questi solidi $ABFCR$, $GDFEH$ proporzionali a' parallelepipedi eretti sopra le stesse sezioni AC, GE nelle loro lunghezze BF, DF, averanno ancora la distanza de' loro centri di gravità delle sue basi ptoporzionali a dette lunghezze, onde il momento del peso nel primo solido al momento nel secondo, sarà in ragione composta delle sezioni AC, GE, e de' quadrati delle lunghezze BF, DF, i quali sono come l' altezze BC, DE: dunque ancora essi momenti sono in ragione composta de' quadrati BC, DE, e delle larghezze AB, GD, e però sono proporzionali a' momenti delle resistenze nelle loro basi; onde se uno di detti pesi eguaglia la sua resistenza respettiva, ancora l' altro pareggerà la sua resistenza corrispondente. Il che &c.

COROLLARI.

Fig. 198. I. Se si facesse girare il medesimo trilineo parabolico intorno alla sua tangente FB, onde risulterebbe il solido rotondo $CEFHR$ simile allo spazio d' una tromba, averà pure le resistenze respettive proporzionali a' momenti de' pesi delle sue porzioni, essendo il momento della resistenza CR a quello della resistenza EH in ragione composta di tali sezioni circolari, e de' loro raggi BC, DE, come de' quadrati BF, DF, della qual ragione si compongono ancora i momenti da' pesi di essi solidi.

lidi, essendo ancor essi in ragione composta delle basi suddette circolari, e de' quadrati delle lunghezze BF, DF, proporzionali a' raggi BC, DE.

II. Se dell'ordinate BC, DE di questo trilineo parabolico si facessero pure da per tutto quadrati, o simili triangoli, o altri poligoni simili, ne riuscirà parimente un solido, le cui porzioni, col loro peso, potranno avere egual resistenza.

PROPOSIZIONE LXII.

Tavola XX. Fig. 199.

Il solido cilindrico, o prismatico A F L G, *sostenuto in* D, *abbia i pesi* P, H *pendenti dagli estremi, e da essi si equilibri la di lui resistenza, essendo i massimi, che possa reggere senza rottura. E lo stesso solido pasato nell' altro sostegno* B, *abbia ivi parimente la sua resistenza equilibrata da' pesi* M, N, *attaccati ne' medesimi termini* L, F, *sarà la somma de' primi pesi* P, H *a quella degli altri due* M, N, *come reciprocamente il rettangolo* L B F *al rettangolo* L D F, *prescindendo però dal peso di esso solido.*

IMperocchè essendo tutti questi pesi di egual momento, sarà P ad H, come FD a DL, e componendo la somma di P ed H, sarà ad H come FL a DL; ma H ad N è come FB a DF, ed N alla somma de' due M, N, come LB ad FL; dunque la somma di P ed H alla somma di M ed N, è in ragione composta di FL a DL, di FB a DF, e di LB ad FL, onde di quà e di là togliendo FL, che è un antecedente eguale ad un conseguente, resta, che la somma di P ed H a quella di M ed N sia come il rettangolo LBF all'altro LDF. Il che &c.

COROLLARI.

I. Dunque le resistenze respettive in *D*, e in *B*, pareggiate dalle somme di que' pesi, saranno anch' esse reciprocamente come i detti rettangoli *LBF*, *LDF*.

II. Onde la minima resistenza di tal solido sarà nel mezzo, perchè la resistenza in *D* a quella in *B* (se fosse *D* nel mezzo, di manierachè *LDF*, sarebbe il quadrato della *DF*, metà di tutta la lunghezza *FL*) sarà come il rettangolo *LBF* al quadrato *DF*, che è maggiore di esso.

Fig. 100. III. La scala di tali resistenze di un solido cilindrico, o prismatico *FL* di eguale grossezza, sarà la figura *FQNPL* reciproca della parabola *FHNL* eretta sopra la base della lunghezza di tal solido; Imperocchè, essendo la resistenza nel mezzo *D* a quella in un' altro punto *B*, come il rettangolo *LBF* al quadrato *DF*, ed essendo questi come le rette *HB*, *DN* diametri di essa parabola, facendo come *BH* a *DN*, così la stessa *DN* alla *BM*, ne riuscirà quella curva *NM*, in cui la resistenza della sezione in *D*, alla resistenza dell' altra in B, sarà come *DN* a *BM*; onde sarà fatta la scala di tali resistenze, come accennò il Sig. Viviani.

PROPOSIZIONE LXIII.

Fig. 101. *Se il prisma, o cilindro* AB *sostenuto nel mezzo in* D, *sarà di tanta lunghezza, che il peso delle proprie sue parti eguali* AD, DB *pareggi la sua resistenza* CD, *di manierachè con un minimo peso aggiunto potesse troncarsi, preso un' altro prisma, o cilindro* MN *egualmente grosso, ma di lunghezza me*

dia

dia proporzionale fra tutta la AB, *e la sua metà* AD, *il quale sia sostenuto ne' suoi estremi* M, N, *sarà il momento di questo suo peso parimente eguale alla resistenza della sua media sezione* PQ *eguale all' altra* DC.

IMperocchè essendo la metà del peso *AB*, cioè la porzione *AC*, applicata nel suo centro di gravità nella sezione *EG*, che divide per mezzo la lunghezza *AC*, e l' altra metà di peso, cioè *BC* nel centro della sezione *HF*, che divide per mezzo l' altra parte *CB*, gli quali pesi col loro momento fanno forza alla resistenza della sezione *CD*; Similmente reggendosi dal sostegno *M*, la metà di quell' altro solido *MP*, e l' altra metà *NP* dal sostegno *N* con le distanze *QM*, *QN*, le quali pure saranno medie proporzionali fra le lunghezze *AC*, *CE*, siccome l' intera *MN*, si è supposta media proporzionale fra tutta la *AB*, e la metà *AC*, dunque il peso *AC* al peso *MP* sarà pure reciprocamente, come la distanza *QM* alla distanza *GD*, dalle quali essi pesi vi pendono, e però saranno eguali i loro momenti, e lo stesso può dirsi dell' altre due metà d' ambi i pesi applicate similmente a rompere le eguali resistenze *DC*, *QP*; dunque ha la stessa forza il cilindro o prisma *AB* sopra la resistenza della sezione *CD*, come il cilindro *MN*, sopra la resistenza dell' eguale sezione *QP*.

PROPOSIZIONE LXIV.

Nel solido LBFM *retto fra due sostegni ne' suoi termini* L, F, *le resistenze ne' siti* R, D, *sono in ragione composta della sezione* RTO, *all' altra* DBM, Fig. 101.

 e del-

e delle loro centrali distanze PR, QD, *e della reciproca de' rettangoli* LDF, LRF.

IMperocchè se vi fosse parimente sostenuto un prisma *FGHNA* di eguale lunghezza, le cui sezioni fossero eguali ad una di quelle *BDM*, che nel' sito *R*, sarebbe *REK*, la resistenza di *RTO* a quella di *REK*, sarebbe come il prodotto di tali sezioni nelle distanze *PR*, ed *SR*, la quale è eguale a *QD*: ma la resistenza di *REK* a quella di *DBM*, (per il Coroll. 1. della Propos. 62.) è reciprocamente come il rettangolo *FDL* al rettangolo *FRL*, dunque la resistenza di *RTO* a quella di *BDM* è la ragione composta di tali sezioni, e delle loro distanze centrali, e della reciproca di que' rettangoli. Il che &c.

COROLLARI.

I. Le resistenze di tali solidi sostenuti ne' suoi estremi, saranno eguali in qualunque sito, quando i prodotti di ciascuna sezione nella sua distanza centrale saranno proporzionali a' rettangoli delle parti della lunghezza del solido divisa da tali sezioni. Imperocchè la ragione composta di questi prodotti, e della reciproca de' medesimi rettangoli sarà ragione di egualità.

II. E se tali sezioni saranno parallelogrammi, o triangoli, o parabole, le cui distanze centrali sarebbero proporzionali alle loro altezze, allora i prodotti del quadrato delle altezze e delle basi di tali sezioni, saranno proporzionali a detti rettangoli.

Fig. 203. III. Se sarà qualunque figura *FBL* posta verti-

ticalmente, e gli si connetta un orizzontale figura FOL, in cui sia come una data linea FG a qualunque ordinata RO, così il quadrato dell' ordinata RI nella figura verticale, al rettangolo LRF, riuscirà il solido composto di queste due figure, le cui ordinate faccino tanti parallelogrammi, o triangoli, o parabole, di resistenza eguale in qualunque sito, perchè il prodotto del quadrato IR nella base della sezione RO, essendo eguale al prodotto della data FG, nel rettangolo LRF, sarà da per tutto il prodotto de' quadrati dell' altezze nelle basi delle loro sezioni, proporzionale al suo corrispondente rettangolo.

IV. Se FBL sia un semicircolo, o una semielisse verticale, sarà la figura orizzontale $FHNL$ un parallelogrammo, le cui larghezze sempre eguali, e però sempre proporzionali alla data retta FG, come il quadrato RI nel semicircolo eguaglia il rettangolo FRL, ed il quadrato BD eguaglia l' altro rettangolo FDL, e nella semielisse sono quei quadrati sempre proporzionali a detti rettangoli, onde questo solido averà eguale resistenza in qualunque sezione, come dimostrò il Viviani, e poscia il Blondello, ed indi il Sig. Alessandro Marchetti. Fig. 204.

V. Anzi potrebbe farsi una volta compresa da due archi FAL, FBL ambidue ellittici, o pure uno di essi semicircolare, ed averebbe nelle sue grossezze AB, IE eguale resistenza, essendo quelle stesse le differenze delle sezioni maggiori AD, IR, dalle minori BD, ER, le quali con eguale larghezza sono egualmente resistenti in ciaschedun semicircolo, o semielisse. Fig. 205.

VI.

Fig. 106. VI. Se poi fosse la figura verticale il parallelogrammo *ALFG*, e l'orizzontale una parabola *FML* descritta sopra la base *FL*, sarebbe pure il solido da queste due figure composto di eguale resistenza, come deve intendersi ciò che ne dice il Galileo, benchè da alcuni in ciò rifiutato, credendo, che la parabola dovesse essere verticale; imperocchè certamente le linee *RO*, *DM*, basi delle sezioni di questo solido, essendo come i rettangoli *FRL*, *FDL*, saranno pure esse basi moltiplicate per gli quadrati eguali *IR*, *BD*, proporzionali a detti rettangoli.

Fig. 107. VII. Fatto ancora un triangolo orizzontale *FHL*, di cui la base *FH* suppongasi eguale alla data *FG*, descritta col diametro *FL*, eguale al suo lato retto, la parabola *FPA*, e compiuti i rettangoli delle ordinate di queste due figure, ne riuscirà un cuneo parabolico di eguale resistenza in qualunque sezione *IROE*, perchè come sta *FG*, ovvero *FH* ad *RO*, cioè *FL* ad *RL*, così sta il rettangolo *LFR* al rettangolo *FRL*, e però il quadrato *IR* essendo eguale al rettangolo *LFR*, sta al rettangolo *FRL*, come la data linea ad *RO*.

PROPOSIZIONE LXV.

Fig. 108. *Dato un cilindro* A B D F, *in cui il momento del suo peso eguagli il momento della sua resistenza, e essendo fitto nella parete in uno de' suoi estremi, o pure ne' suoi termini retto da due sostegni, ritrovarne altri innumerabili, che abbiano la medesima proprietà.*

Si

SI faccia la parabola *GACFI* in cui l'abſciſſa del diametro *CE* eguagli il diametro del dato cilindro, e l' intera ordinata *AF* ne eguagli la lunghezza; tirando in qualſivoglia altro ſito per un punto *H* del diametro una altra ordinata *GI*, s'intenda un' altro cilindro di queſta lunghezza *GI*, il cui diametro del circolo ſia eguale all' abſciſſa *CH*, queſto pure averà il momento del ſuo peſo eguale al momento delle reſiſtenze, come ſi ſuppone lo aveſſe il dato cilindro *ABDF*. Imperocchè il momento del peſo nel primo *ABDF* a quello del ſecondo *KGIL*, è in ragion compoſta di eſſi ſolidi, e delle loro lunghezze; ma eſſi ſolidi ſono in ragion compoſta delle baſi circolari, cioè de' quadrati *CE*, *CH*, e delle loro lunghezze, dunque eſſi momenti de' peſi ſaranno in ragion compoſta del quadrato *CE* al quadrato *CH*, e del quadrato della lunghezza *AF* al quadrato *GI*, oppure del quadrato *AE* al quadrato *GH*, i quali ſono come *CE* a *CH* ancor eſſi; dunque tali momenti de' peſi ſono come il cubo *CE* al cubo *CH*: ma ancora i momenti della reſiſtenza di tali ſezioni, eſſendo come i quadrati de' diametri circolari moltiplicati per le centrali diſtanze, proporzionali pure a' medeſimi diametri, ſono come gli ſteſſi cubi *CE*, *CH*, dunque i momenti de' peſi ſono proporzionali a' momenti delle reſiſtenze, onde ſiccome nel primo ſolido il momento del peſo eguaglia quello della reſiſtenza, lo ſteſſo riuſcirà nel ſecondo, ed in qualunque altro ſimilmente deſcritto con la lunghezza di qualſivoglia ordinata della parabola, e col diametro del ſuo circolo eguale all' abſciſſa. Il che &c.

Co-

Corollario.

Lo ſteſſo rieſce ne' priſmi, ne' coni. e nelle piramidi, le cui lunghezze ſiano come tali ordinate della parabola, e le ſezioni ſimili abbiano in ſimile ſito l' altezze eguali all' abſciſſe del diametro di eſſa parabola.

AVVERTIMENTO.

Molte altre proprietà appartenenti a queſta materia poſſono oſſervarſi in un mio libro di riſpoſta Apologetica, ſiccome ancora ne' Comentarj da me fatti al trattato di reſiſtenza del Viviani, e nell' Appendice ivi da me aggiunte, le quali non occorre quì più rimettere.

Solamente parmi bene avvertire in primo luogo, che un priſma, o cilindro poſto ſopra due ſoſtegni, di cui ſi è fin' ora diſcorſo, ha molto minor reſiſtenza, che ſe ne' ſuoi termini foſſe fitto in due muri: perchè nel primo caſo, ſe la propria gravità, o un peſo attaccatogli nel mezzo, può tirarlo in giù, con rompere la ſua ſezione dove ha il ſuo centro di gravità, cioè appunto nel mezzo; nel ſecondo caſo biſognerà eſſervi tanto peſo, che oltre il rompere la ſezione del ſolido nel mezzo, ne rompa ancora le altre due ſezioni fiſſe in ambi i muri, cioè verſo i ſuoi termini, non potendo queſti alzarſi liberamente, e ſegarſi ſolo quella di mezzo, perchè in tal caſo non ſono ſolamente appoggiati a' ſoſtegni, ma racchiuſi nel muro.

In

In secondo luogo si osservi, essersi quì supposto, come ha fatto il celebre Galileo, che le sezioni per cui si schiantano i solidi fissi nel muro, o attaccati in due sostegni, non siano composte di tali fibre, che nella rottura si debbono dilatare, altre più, altre meno, secondo che sono più lontane, o più prossime al loro appoggio, come poscia ha dimostrato il Sig. Mariotte nel suo trattato de' Movimenti dell' Acque, *part.* 5. *disc.* 2. Il che da molti altri Autori è stato approvato; Imperocchè non si rompe qualunque solido tutto in un tratto, scorgendosi, che ogni bastoncello si piega prima di rompersi; dal che esso Mariotte ne ricava non esser vero il detto dal Galileo, che il peso, tirando un solido rettangolo direttamente, con direzione perpendicolare alla sua base fitta nel muro, stia al peso, che attaccato al termine della lunghezza del medesimo solido, lo tirasse in giù, con direzione perpendicolare all' orizonte, stia, come la lunghezza di esso solido, alla metà dell' altezza di essa sezione fissa nel muro, che è la distanza del di lei centro dal sostegno, ma piuttosto, dover essere quel peso a quest' altro, come la detta lunghezza del solido, alla quarta, o alla terza parte dell' altezza della sua frazione; il che ancora dal Leibnizio, e dal Signor Warignone si suole dimostrare; ma la diversa condizione di varie materie, in alcuni solidi può far riuscire maggiore, o minore la proposizione di tali pesi, che corrispondono alla proporzione delle due resistenze assoluta, e respettiva di qualunque solido da essi pesi reppresse.

Ciò può dedursi ancora dal paragone del pe-

so,

so, che possa rompere un solido cilindrico, o prismatico fitto nel muro, con quello, che lo strapperebbe appoggiato il medesimo, co' suoi termini, sopra due sostegni. Vi è chi pretende nel primo caso dover essere il peso attaccato all' estremo termine del solido fitto nel muro, la metà dell' altro peso, nel secondo caso appiccato al mezzo della lunghezza del medesimo solido, sostenuto in ambidue gli suoi termini. Ma nella mia Risposta Apologetica fu dimostrato, dover essere questo non solamente doppio di quello, ma quadruplo: anzi se il solido fosse fitto esattamente co' suoi termini in due muri, e non solamente soprapposto a due sostegni dovrebbe essere il peso, che lo rompesse, almeno ottuplo di quello, che attaccato nell' ultimo termine dovesse rompere esso solido fisso unicamente con il primo termine nel muro, variandosi però tali proporzioni secondo la diversa materia de' solidi, connessi con fibre di varia forza; onde si sono fatte molte sperienze, in cui il peso attaccato al mezzo del solido semplicemente appoggiato a due sostegni, ora si trovò alquanto minore, ora alquanto maggiore del quadruplo di quello, che era attaccato al termine del medesimo solido applicato solamente con l' altro termine nel muro.

Il Signor Marchese Poleni degnissimo Professore di Mattematica nello Studio di Padova, mi mandò le seguenti sperienze da lui fatte, e ne registrerò quì le sue medesime parole, che sono le seguenti. *Presi un Prisma di legno d' Abete lungo piedi $2\frac{1}{2}$ (il quale mostrava tutte le condizioni, che possono far credere un eguale resistenza in cadauna fibra) di*

di base quadrata. Era il lato della base linee 8. cioè $\frac{8}{12}$ di pollice; ed era di due piedi la distanza del punto primo fuori del muro, in cui il Prisma era fitto al punto, in cui stava attaccata una lance, nella quale si andava crescendo il peso mezz' oncia per volta: si ruppe questo legno in vicinanza del muro, con libbre 16. once 7. di peso. Riposi dopo il restante Prisma sopra due fulcimenti, in maniera, che la distanza tra quelli fosse pure di due piedi: poi posto nella lance attaccata nel mezzo, il peso (che nella maniera di prima si andava crescendo) si ruppe il Prisma con libbre 62. e once 2. di peso.

Un Cilindro di cera fitto nel muro, il diametro della di cui base era linee 7. la lunghezza dal muro al peso attaccato era d' un piede, si ruppe col peso di una libbra, e once 2. Posto con l' estremità sopra due fulcimenti, distanti pure d' un piede, si ruppe col peso di libbre 5. e once 4.

Un altro Cilindro di cera fitto nel muro, il diametro della di cui base era d' un pollice, ed il peso gli era attaccato in distanza di pollici 7. si ruppe col peso di libbre 8. e once 7. posto sopra due fulcimenti, li quali avevano la stessa distanza, si ruppe col peso di libbre 36.

Un Cilindro di vetro colorato, il diametro della di cui base era 3. linee, fitto nel muro, e posto il peso in distanza d' un piede, si ruppe col peso di libbre una, e once 7. sopra due fulcimenti nella medesima distanza, si ruppe col peso di libbre 6. e once 9.

Un cannello di vetro perforato (come quelli de' barometri) di 3. linee in circa di grossezza, fitto con una estremità nel muro, e posto il peso in di-

stanza

stanza di un piede, si ruppe col peso di libbre 2; posto sopra due appoggi, i quali avevano la stessa distanza, si ruppe col peso di libbre 9. e once 2.

Più altre esperienze ho fatto, ma queste bastano per indicarci (avendo anche riguardo al peso de' Cilindri) che la proporzione de' pesi ne' casi supposti è sempre vicina alla proporzione di 1. a 4. Ho però osservato, che per lo più il peso attaccato al mezzo del Prisma, o Cilindro è di qualche cosa maggiore del quadruplo del peso attaccato all' estremità del Prisma, o Cilindro fitto nel muro: e mi ha fatto osservare ciò più diligentemente il vedere, che questo accrescimento è più certo ne' corpi di maggior resistenza, che in quelli di resistenza minore.

Sarei troppo lungo, se aggiunger volesse a queste altre simili sperienze, da me fatte quì in Pisa, ed altrove ancora da' miei Amici: però credo ci bastino le già addotte, onde quì rimane questo Trattato.

IL FINE.

Fig. 1.
4 L
L
H
4 H
Fig. 3.
MEC. TAB. I.
V
T
S
C
H
D
L
Fig. 5.
S
H
L
V
C
D
E
Fig. 8.
3 M
M
V
3 V
P 4
P
C
C 4
Fig. 11.
F
E
A
4 B

MEC. TAB. II.
Fig. 16.
A
E
D
B
F
H
G
Fig. 18.
Fig. 21.
C
E
D
Fig. 22.
F
Fig. 26.

MEC. TAB. III.
Fig. 32.
B
M
I
A
H
E
K
G
F
O
D
C
L
Fig. 36.
G
A
B C D
Fig. 37.
G D
A
B
C
V
L
D E
I
B

MEC. TAB. IV.
Fig. 44.
Fig. 47.

MEC. TAB. V.
Fig. 54.
E
D
Fig
G
F
G
Fig. 59.
E
O
K
D
B
P
H
F
M
G
N
P
B
55.
D
Fig. 58.
B
F
V
B

MEC. TAB. VI.
Fig. 64.
D
E
C
B
B
E
C
D
Fig. 62.
B

MEC. TAB.VII.
Fig. 66.
E
C
D
F
G
I
H
M
H
B
L

Fig. 71.
MEC.
TAB. VIII.
Fig. 67.
E
F
E
B
D
B
P
G
I
H
K
F
E
B
A
Fig. 68.

Fig. 77.
M. T. IX.
C
G
F
E
P
D
C
B
T
V
A

Fig. 81.

MEC. TAB. XI.
Fig. 86.
Fig. 91.

M. T. XIII.
Fig. 112.

M.T.XIII.
Fig.112.
Fig.116.
Fig.117.

MEC · TAB · XIV ·
Fig · 127 ·
m
C
B
M
E
C
H
I
G
Fig · 129 ·
A
D

MEC. TAB. XVI.
Fig. 155.
A
C
E
B
D
Fig. 156.
CB
E
D
D
M
G
K
Fig. 162.
G
H
M
F
L
I
D

Fig. 166.
MEC. TAB. XVII.
D
B
E
Fig. 16
A
C
D
H
B
E
E
H
N
Fig. 168.
G
L
K
E
N
O
Fig. 173.
D
G
E
R
B
Fig. 174.
M
G
D
S

MEC · TAB · XVIII ·
Fig. 176.
N
C
S
R
H
K
L
F
B
D
T
C
I
F
E
D
S
Fig. 178.
C
G
B
E
I
D
H
A
F
182.
B
C
C